

Université de Montréal

Géométrie spectrale sur le disque : loi de Weyl et
ensembles nodaux

par

Claude Gravel

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Orientation mathématiques pures

août 2012

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Géométrie spectrale sur le disque : loi de Weyl et
ensembles nodaux**

présenté par

Claude Gravel

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Iosif Polterovich

(directeur de recherche)

Marlène Frigon (Université de Montréal), Nilima Nigam (McGill University)

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Soit D le disque de rayon 1 ou soit $S(\alpha)$ le secteur du disque de rayon 1 et d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$. Soit le Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sur A où $A = D$ ou $A = S(\alpha)$.

Dans ce mémoire, des questions relatives au problème des valeurs propres de l'opérateur Δ sur A c'est-à-dire relative aux solutions de l'équation $\Delta(u) + \lambda u = 0$ avec des conditions de Dirichlet aux frontières seront abordées. D'abord nous rappelons que l'ensemble des valeurs admises pour λ c'est-à-dire l'ensemble des solutions pour λ sont les zéros des fonctions de Bessel de premier type. Cet ensemble de valeurs propres s'appelle le spectre, c'est l'ensemble des valeurs de λ étant solutions de l'équation précédente. Si le spectre est dénoté par $\text{Sp}_A(-\Delta)$ et si $j_{\nu,k}$ dénote le k^{e} zéro de la fonction de Bessel d'ordre $\nu \geq 0$ de premier type, alors

$$\begin{aligned}\text{Sp}_{S(\alpha)}(-\Delta) &= \{j_{\frac{n\pi}{\alpha},k}^2 ; n = 1, 2, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots\} \\ \text{Sp}_D(-\Delta) &= \{j_{n,k}^2 ; n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots\}.\end{aligned}$$

Le premier problème abordé consistera à déterminer la première ligne où la deuxième fonction propre s'annule dans le cas d'un secteur $S(\alpha)$. L'ensemble nodal d'une fonction propre u_j est le sous-ensemble $Z_j \subset A$ sur lequel la fonction propre s'annule, c'est l'ensemble des zéros de u_j . Les domaines nodaux de u_j sont les composantes connexes du complément de l'ensemble nodal, c'est l'ensemble des points du domaine où u_j ne s'annule pas. Il est utile de se rappeler que la question précédente ne se pose pas pour la première fonction propre puisque cette dernière n'a que la frontière comme seule ligne nodale. Comme il y sera montré, si l'angle du secteur est suffisamment petit, alors la ligne nodale est décrite par l'équation en coordonnée polaire $r = \frac{j_{\nu,1}^2}{j_{\nu,2}^2} < 1$ où $\nu = \frac{2\pi}{\alpha}$ sinon elle est décrite par

$\theta = \frac{\alpha}{2}$. Nous verrons également qu'il existe un angle critique α_0 pour lequel la ligne nodale est indéterminée et que cet angle critique est donné implicitement par l'équation $j_1(2\nu) - j_2(\nu) = 0$ où $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$. De même, lorsque l'angle $\alpha = \alpha_0$, nous verrons que la multiplicité de 2^e valeur propre est double.

Le deuxième problème consiste à construire un algorithme pour obtenir les m premières valeurs propres, cet algorithme est également efficace pour des valeurs larges de m . Cet algorithme ne doit pas résoudre les systèmes d'équations différentielles ordinaires relatives au problème $\Delta(u) + \lambda u = 0$ puisque la résolution de tels systèmes est très coûteuse en temps et en mémoire voire presque irréalisable pour des valeurs propres très larges. Le problème d'ordonner les valeurs propres pour lesquelles une caractérisation de deux paramètres existe est équivalent à connaître la structure des domaines nodaux des fonctions propres $\{u_j\}_{j=1}^m$. La clef de voûte derrière ce problème est d'utiliser un théorème dû à Courant sur le nombre de domaines nodaux d'une fonction propre.

Troisièmement, soit $N(\lambda)$ la fonction de compte des valeurs propres c'est-à-dire

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1.$$

Une explication approfondie d'un théorème dû à Kuznetsov et Fedosov montrant que

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + O(\lambda^{\frac{1}{3}})$$

sera donnée. Pour y arriver, un « grand » détour sur l'approximation uniforme des fonctions de Bessel de premier type d'ordre réel strictement positif et d'argument positif.

Finalement, un algorithme permettant d'évaluer exactement et efficacement $N(\lambda)$ sans avoir à trouver toutes les valeurs propres $\lambda_j \leq \lambda$ sera donné. Cet algorithme n'utilise que la monotonie des zéros des fonctions de Bessel et peut trouver par exemple $N(9 \cdot 10^8)$ rapidement. Ce 2^e algorithme est nettement plus efficace à utiliser pour évaluer $N(\lambda)$ que si nous trouvions naïvement toutes les valeurs propres $\lambda_j \leq \lambda$ en utilisant le 1^{er} algorithme.

SUMMARY

Let D be the unit disc, $S(\alpha)$ be a sector of the unit disc with angle $\alpha \in (0, 2\pi)$, and let $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ be the Laplacian.

In this master's thesis, we will consider several questions arising from the study of the eigenvalue problem $\Delta(u) + \lambda u = 0$ on A with Dirichlet boundary conditions, where $A = D$ or $S(\alpha)$. We proceed by first recalling that the spectrum of the negative Laplacian (i.e. the admissible set of eigenvalues λ for the above eigenvalue problem) is given by the zeros of the Bessel function of the first kind. In other words, if we denote by $\text{Sp}_A(-\Delta)$ the spectrum of the operator $-\Delta$ on A , and by $j_{\nu,k}$ the k^{th} zero of the Bessel function of the first kind of order $\nu \geq 0$, then

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{S(\alpha)}(-\Delta) &= \left\{ j_{\frac{n\pi}{\alpha},k}^2 ; n = 1, 2, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots \right\} \\ \text{Sp}_D(-\Delta) &= \left\{ j_{n,k}^2 ; n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots \right\}. \end{aligned}$$

The first problem consists of the determination of the first nodal line of the second eigenfunction of a sector $S(\alpha)$. The nodal set of an eigenfunction u_j is the subset $Z_j \subset A$ over which the eigenfunction vanishes. Nodal domains of an eigenfunction u_j are the connected components of the complement of the nodal set i.e. of the set at which the eigenfunction does not vanish. Note that this corresponding problem for the first eigenfunction is uninteresting because the nodal set would consist of the boundary ∂A itself. We will see that when α is small enough, the nodal curve is described by the equation $r = \frac{j_{\nu,1}^2}{j_{\nu,2}^2} < 1$, where $\nu = \frac{2\pi}{\alpha}$, whereas for large α it is described by $\theta = \frac{\alpha}{2}$. Thus, there exists a critical angle α_0 for which the second nodal curve is undefined, and this angle is given implicitly by solving $j_2(\nu) - j_1(2\nu) = 0$ where $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$. Also the second eigenvalue has multiplicity 2 when the angle of the sector is α_0 .

The second problem is to devise an algorithm for obtaining the first m eigenvalues that is also efficient for large m . Such an algorithm must not rely on the explicit integration of the underlying ODEs, since the solution of such ODEs would become prohibitively expensive when large eigenvalues are involved. We will see that the problem of properly ordering the eigenvalues (for which a two-parameter characterization is known) is equivalent to knowing the structure of the nodal sets of the first m eigenfunctions $\{u_j\}_{j=1}^m$. Thus, the key insight behind the algorithm is to perform the ordering using nodal set information, which in turn is provided by Courant's theorem on the number of nodal domains of a given eigenfunction. Thirdly, let $N(\lambda)$ be the counting function of the eigenvalues i.e

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1.$$

A detailed explanation of a theorem given by Kuznetsov and Fedosov showing that

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + O(\lambda^{\frac{1}{3}})$$

will be given. In order to get there, we will look at some results concerning the uniform expansion Bessel functions of the first kind of strictly positive real order and evaluated at $x \in R^+$.

Finally, we will present an algorithm that allows the exact and efficient evaluation of $N(\lambda)$, without having to compute all of the smaller eigenvalues $\lambda_j \leq \lambda$. The proposed algorithm only relies on the monotonicity of the zeros of the Bessel functions and can, for instance, find quickly $N(9 \cdot 10^8)$. The latter algorithm provides a much more efficient alternative to the naive approach of finding, with the help of the 1st algorithm, all the eigenvalues λ_j such that $\lambda_j \leq \lambda$.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	v
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	x
Remerciements	xi
Introduction	1
Chapitre 1. Préliminaires	4
1.1. Rappels - définition du Laplacien, décomposition du spectre et fonction de compte	5
1.2. Séparation de variables, équation différentielle de Bessel, fonctions et valeurs propres du Laplacien sur un domaine circulaire.....	8
1.3. Développement asymptotique d'Olver des zéros des fonctions de Bessel	13
1.4. Les ensembles nodaux des fonctions propres et leurs structures, cas du disque et du secteur en exemples	15
Chapitre 2. Les ensembles nodaux des fonctions propres	18
2.1. La première ligne nodale de la deuxième fonction propre	19
2.2. Algorithme pour ordonner les valeurs propres et déterminer la structure des ensembles nodaux	24

2.2.1. Résultats comparatifs	25
Chapitre 3. Loi de Weyl pour le disque	33
3.1. Approximation uniforme de la fonction de Bessel de premier type .	34
3.1.1. Calculs numériques des variations totales	41
3.2. L'article de Kuznetsov et Fedosov, explications et corrections	44
3.3. Algorithme pour calculer la fonction de compte $N(\lambda)$	53
3.3.1. Quelques résultats pour les valeurs de la fonction de compte $N(\lambda)$	56
3.3.2. Temps de calcul pour les procédures naïve et efficace d'évaluer la fonction de compte $N(\lambda)$	57
Conclusion	59
Bibliographie	61
Annexe A. Liste des programmes en Maple et en Matlab	A-i
A.1. Programme pour obtenir la suite des m premières valeurs/fonctions propres pour $m \in \mathbb{N}$	A-i
A.2. Programme pour évaluer la fonction de compte	A-v
A.3. Évaluation des points stationnaires des fonctions apparaissant dans le développement asymptotique d'Olver	A-ix
A.4. Programme en Matlab pour résoudre les problèmes de valeurs propres et visualiser les ensembles nodaux des fonctions propres	A-xiii
A.5. Précision des calculs	A-xxiv
A.6. Méthodes utilisées par le logiciel Maple pour évaluer les zéros ..	A-xxv

LISTE DES FIGURES

2.1	1 ^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.11$, $\lambda_2 \approx 91.0072$	22
2.2	1 ^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.112531$, $\lambda_2 \approx 90.8402$	22
2.3	1 ^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.112531602739001$, $\lambda_2 \approx 90.8371$	23
2.4	1 ^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.2$, $\lambda_2 \approx 81.9144$	23
2.5	Domaines nodaux de la 3 ^e , 7 ^e , 16 ^e , 25 ^e , 27 ^e et 30 ^e fonction propre pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$ de rayon 1	28
2.6	Domaines nodaux de la 5 ^e , 9 ^e , 11 ^e , 19 ^e , 26 ^e et 29 ^e fonction propre pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha \approx 5.4366$ de rayon 1	29
2.7	Domaines nodaux de la 1 ^{re} , 4 ^e , 5 ^e , 6 ^e , 7 ^e et 8 ^e fonction propre pour le disque D de rayon 1	31
2.8	Domaines nodaux de la 28 ^e , 29 ^e , 30 ^e , 31 ^e , 32 ^e et 33 ^e fonction propre pour le disque D de rayon 1	32

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Résultats pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$ de rayon 1	27
2.2	Résultats pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha = 2 \exp(1) \approx 5.4366$ de rayon 1	27
2.3	Résultats pour le disque	30
3.1	Valeurs de $N(\lambda)$ pour $d \cdot 10^p$ avec $d = 1, \dots, 9$ et $p = 2, \dots, 8$	57
3.2	Temps requis pour évaluer $N(\lambda)$ rapidement avec l'algorithme de la section 3.3	58
3.3	Temps requis pour évaluer $N(\lambda)$ naïvement avec l'algorithme de la section 2.2	58

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur, Iosif Polterovich, pour ses conseils et son apport financier durant la rédaction de ce mémoire. Je remercie également les membres du jury, Marlène Frigon et Nilima Nigam, pour leurs remarques qui ont amélioré mon mémoire. Je remercie ma famille et mes amis pour leurs encouragements et le temps qu'ils prennent avec moi pour me changer les idées lorsque cela est nécessaire. Un merci spécial pour les discussions éclaircissantes à Dominique Rabet et Igor Wigman pour la section 3.2 de ce mémoire. Je remercie également Felix Kwok pour la correction de mon résumé en anglais.

INTRODUCTION

Ce mémoire est un exemple de ce qu'il est possible d'étudier en géométrie spectrale. Puisqu'il est généralement difficile de définir et de délimiter exactement un domaine de la connaissance, le lecteur trouvera dans ce mémoire quelques exemples de ce qu'il est possible d'étudier en géométrie spectrale. Néanmoins, personne ne se trompe en affirmant que la géométrie spectrale est un domaine alliant la géométrie et l'analyse spectrale. Traditionnellement, l'analyse spectrale étudie le spectre des opérateurs comme les matrices ou encore des opérateurs différentiels comme l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$. Généralement les opérateurs agissent sur des objets comme des vecteurs ou des fonctions. Les domaines sur lesquels ces objets sont définis sont plats généralement comme un carré en dimension 2 ou un cube en dimension 3. En changeant les domaines sur lesquels ces objets sont définis, par exemple en considérant des vecteurs sur la sphère en identifiant chaque point antipodal comme équivalent, les opérateurs agissant sur ces objets ont des « comportements » différents. Le spectre des opérateurs est entre autres différent d'une géométrie à une autre. La géométrie spectrale étudie le spectre des opérateurs agissant sur des objets définis sur des géométries courbes comme la sphère ou le tore. Comme il n'est pas nécessaire de faire intervenir l'ensemble des vérités admises concernant un énoncé, la phrase précédente est certainement vraie mais non complète.

Plusieurs problèmes peuvent être étudiés en théorie spectrale. Ces problèmes varient selon que les opérateurs possèdent certaines propriétés comme entre autres être compact, linéaire, auto-adjoint, auto-adjoint non-borné, etc. Pour certains types d'opérateurs, comme le Laplacien Δ qui sera d'intérêt dans ce qui suit, il est possible de décomposer leur spectre au sens exposé au chapitre 1. De par la

forme du domaine, il peut être possible de connaître explicitement la forme des fonctions propres.

De façon générale, lorsque les mathématiciens ont une fonction sous leurs yeux, ils aiment connaître où elle s'annule. C'est la même la chose avec les fonctions propres. L'ensemble des zéros d'une fonction propre donnée est un ensemble fermé de la variété sur laquelle lesdites fonctions propres sont définies. Cet ensemble porte un nom particulier : il s'appelle le domaine nodal de la fonction propre donnée. Le complément de l'ensemble des zéros est ouvert et « découpe » la variété en composantes connexes.

Également, lorsque l'ensemble des fonctions propres forment une base séparable et complète pour l'espace L^2 sur le domaine en question, il est intéressant de s'intéresser aux problèmes asymptotiques. Un de ces problèmes est relié à la distribution empirique des valeurs propres. Les valeurs propres des opérateurs définis positifs ont des valeurs propres positives. Par conséquent, étant donné une valeur fixe positive, combien de valeurs propres sont plus petites que cette valeur fixée a priori en tenant compte de la multiplicité ?

Dans ce présent manuscrit, l'analyse spectrale se fera sur le disque D de rayon 1 ou sur un secteur $S(\alpha)$ d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ de rayon 1. ∂D ou $\partial S(\alpha)$ dénotent la frontière de D ou $S(\alpha)$. L'opérateur d'intérêt sera évidemment le Laplacien dénoté Δ ou ∇^2 . Connaître le spectre du Laplacien permet de connaître dans ce cas, et dans bien d'autres cas, le spectre de l'opérateur des ondes, de la chaleur et Schrödinger. L'espace sur lequel Δ est défini se dénote H_0^1 et il s'appelle l'espace de Sobolev. Les fonctions propres formant une base pour $H_0^1(D)$ avec des conditions de Dirichlet aux frontières sont les fonctions de Bessel de premier type d'ordre $0, 1, 2, \dots$. Les fonctions propres formant une base pour $H_0^1(S(\alpha))$ sont les fonctions de Bessel de premier type $1, 2, \dots$.

Deux problèmes concernant l'opérateur Δ sur D seront étudiés plus particulièrement. Le 1^{er} problème consistera à étudier la configuration des ensembles nodaux des m premières fonctions propres u_j pour $j = 1, \dots, m$. Ce problème sera équivalent à calculer les m premières valeurs propres λ_j pour $j = 1, \dots, m$. Bref, c'est en voulant obtenir un algorithme efficace pour obtenir les m premières valeurs

propres qu'il sera évident comment obtenir la configuration des ensembles nodaux. Un théorème dû à Courant donnant une borne sur le nombre de composantes connexes de la m^{e} valeur propre sera l'outil principal afin d'établir les configurations. Les ensembles nodaux seront des lignes angulaires partant du centre du cercle et des séries de cercles concentriques. De même, un autre problème relié à l'identification de la première ligne nodale de la deuxième fonction propre sur un secteur $S(\alpha)$ sera étudié. On mentionnera la valeur critique de l'angle α dans le cas du secteur $S(\alpha)$ où la ligne décrite par l'équation en coordonnée polaire $r = \text{const.}$ est préférée à la ligne décrite par l'équation $\theta = \text{const.}$. Nous verrons que si l'angle du secteur est critique, alors la 1^{re} ligne nodale n'est pas définie. De même nous verrons que la multiplicité de la 2^e valeur propre λ_2 est double pour ce secteur d'angle critique.

Un autre problème étudié est relié à la distribution asymptotique des valeurs propres de Δ . En d'autres termes, soit $\text{Sp}_D(-\Delta) = \{\lambda_j\}_{j>0}$ le spectre de l'opérateur Δ sur le disque D de rayon 1 avec les valeurs propres ordonnées naturellement c'est-à-dire $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Soit $N(\lambda)$, la fonction de compte des valeurs propres λ_j plus petites que λ c'est-à-dire soit

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$$

Pour des valeurs de λ très grandes,

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + R(\lambda) \quad (\text{Loi de Weyl})$$

où $R(\lambda)$ est le terme d'erreur. Il sera d'abord réexpliqué clairement comment il a été démontré dans [KF] que $R(\lambda) = O(\lambda^{\frac{1}{3}})$. Enfin, un deuxième algorithme permettant d'évaluer $N(\lambda)$ exactement et efficacement est donné. Cet algorithme n'utilise que la monotonie des zéros des fonctions de Bessel. Comme il y sera expliqué, l'algorithme fait une « marche » qui consiste à faire des retours en arrière et des montées en alternance sur des paires d'entiers bien déterminées par le problème en soit. Les coordonnées de ces paires sont l'ordre et l'index des zéros des fonctions de Bessel de premier type pouvant être les candidats possibles pour les valeurs propres.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Voici le plan pour ce chapitre. Les références sont données au début de chaque section.

Dans la **1^{re}** section, certaines propriétés d'intérêt pour ce mémoire de l'opérateur Laplacien dénoté Δ sur un ouvert régulier borné Ω de \mathbb{R}^n sont mentionnées sans preuve. Plusieurs définitions sont données avant d'y arriver permettant de bien définir le domaine de Δ et d'arriver à quelques théorèmes intéressants. La loi de Weyl (fonction de compte des valeurs propres) sera également présentée avec quelques théorèmes pour l'approximer asymptotiquement sur des domaines Ω arbitraires.

Dans la **2^e** section, il sera montré que résoudre grâce à la séparation de variables le problème à valeurs propres $\Delta u + \lambda u = 0$ sur un domaine circulaire c'est-à-dire lorsque Ω est un secteur ou un disque « engendre » l'équation de Bessel. Il sera montré quelles valeurs λ peut prendre engendrant ainsi la suite spectrale ou le spectre. Il sera montré que les valeurs de λ sont des carrés des zéros de fonctions de Bessel.

Dans la **3^e** section, les zéros des fonctions de Bessel seront approfondis. Plus spécifiquement, le développement asymptotique dû à Olver des zéros sera présenté sans preuve. Ce développement est important pour quiconque veut calculer les valeurs propres de Δ sans avoir à résoudre les équations différentielles directement. Au chapitre 2, il sera montré comment en effet il est possible d'obtenir le spectre, les m premières valeurs propres pour m très grand, du Laplacien. Cette section introduira succinctement les fonctions d'Airy comme des solutions d'une équation

différentielle du même nom. Les zéros de ces dernières et leurs relations aux fonctions de Bessel seront abordés brièvement pour nous permettre de comprendre le développement asymptotique d'Olver.

Dans la 4^e section, les ensembles des zéros des fonctions propres appelés communément les ensembles nodaux des fonctions propres seront étudiés. Un théorème dû à Courant sur le nombre de domaines nodaux sera énoncé sans preuve. Cette section avec la précédente seront utiles pour le chapitre 2.

1.1. RAPPELS - DÉFINITION DU LAPLACIEN, DÉCOMPOSITION DU SPECTRE ET FONCTION DE COMPTE

Le lecteur retrouvera les définitions suivantes et certains théorèmes sur les fonctions et les valeurs propres du Laplacien dans l'ouvrage de références [RaRa] et [Wi].

Soit Ω , un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . Soit $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω différentiables indéfiniment.

Définition 1.1.1 (Le Laplacien Δ). *Soit $u \in C^\infty(\Omega)$. Alors le Laplacien est l'opérateur $\Delta : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ tel que*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Définition 1.1.2 (Fonction propre et valeur propre). *Une **fonction propre** relative à la **valeur propre** λ est une solution non nulle du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le théorème suivant (page 115 de [Wi]) montre que les fonctions propres du Laplacien constituent une base de $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.1.1 (Décomposition du spectre). *Il existe une suite non bornée de valeurs propres de*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

et une suite de fonctions propres relatives $\{\varphi_j\}_j^\infty$ qui est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

Les valeurs propres peuvent être exprimées comme dans la proposition suivante due Rayleigh (page 115 de [Wi]).

Proposition 1.1.1 (Quotient de Rayleigh). *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\lambda_n = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \mid \int_{\Omega} u^2 dx = 1, \int_{\Omega} u \varphi_j dx = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, n-1 \right\}$$

Pour les résultats qui suivent concernant la fonction de compte des valeurs propres $N_{\Omega}(\lambda)$, ils se retrouvent dans [Be].

Soit maintenant $N_{\Omega}(\lambda)$ la fonction de compte des valeurs propres c'est-à-dire

$$N_{\Omega}(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1.$$

La fonction de compte est une fonction à valeurs entières définie sur les réels c'est-à-dire

$$N_{\Omega} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$$

qui est également continue à droite c'est-à-dire pour $h > 0$

$$N_{\Omega}(\lambda) = \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda + h)$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre, alors sa multiplicité est donnée par

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (N_{\Omega}(\lambda + h) - N_{\Omega}(\lambda - h)).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas une valeur propre, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (N_{\Omega}(\lambda + h) - N_{\Omega}(\lambda - h)) = 0.$$

Par conséquent, si λ est une valeur propre, alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \lambda_j$ et tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda - h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda_j - h) < j \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda + h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda_j + h).$$

La connaissance de $N_{\Omega}(\lambda)$ permet donc de retrouver les valeurs propres λ_j et vice-versa.

Plusieurs résultats pour approximer $N(\lambda)$ ont été obtenus. Voici certains d'entre eux. Le premier (voir p. 89 de [Be]) est dû Weyl en 1911 qui a montré que

Théorème 1.1.2 (Weyl).

$$N_{\Omega}(\lambda) \sim \frac{V_n}{(2\pi)^n} \mu(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow \infty$$

où V_n est le volume de la sphère de rayon 1 dans \mathbb{R}^n et $\mu(\Omega)$ la mesure de Lebesgue du domaine borné régulier Ω .

En 1952, 1953 et 1955 Levitan écrivait une série d'articles où il démontrait le théorème suivant donnant une estimation du terme d'erreur. Les articles de Levitan sont respectivement [Le1], [Le2] et [Le3]. En 1956, Avakumović montrait également le théorème suivant dans son article [Av]. Hörmander en donna également une autre preuve en 1968 dans son article [Ho].

Théorème 1.1.3 (Levitan).

$$N_\Omega(\lambda) = \frac{V_n}{(2\pi)^n} \mu(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{(n-1)}{2}}\right)$$

Lorsque Weyl a fait la conjecture suivante qui est vraie pour tout domaine Ω convexe et qui a été prouvée par Ivrii dans [Iv] et, indépendamment par Melrose, dans [Melr] pour d'autres variétés riemanniennes satisfaisant des hypothèses plus générales.

Théorème 1.1.4.

$$N_\Omega(\lambda) = \frac{V_n}{(2\pi)^n} \mu(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} - \frac{V_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \mu(\partial\Omega) \lambda^{\frac{n-1}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Remarque 1.1.1 ($\Delta u + \lambda u = 0$ ou $\Delta u + \lambda^2 u = 0$). *Si au lieu d'étudier l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$, l'équation $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ est étudiée, alors il faut substituer λ par λ^2 dans les résultats qui précèdent.*

Comme le disque sera l'objet géométrique d'intérêt dans ce mémoire, si $\Omega = D$ où D le disque de rayon r , alors, dans [KF], il est montré le théorème suivant spécialisé au cas du disque. **Notons que [KF] étudie le problème $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ plutôt que le problème $\Delta u + \lambda u = 0$. Le théorème est cité presque tel qu'il est dans l'article afin de faciliter son explication au chapitre 3.2 qui lui est consacré entièrement. Nous comprenons bien ici que $k = \lambda$ dans le théorème suivant.**

Théorème 1.1.5 (Kuznetsov et Fedosov, cas du disque D de rayon r). *Soit le problème à valeur propre $-\Delta u = k^2 u$ avec $u|_{\partial D} = 0$. Soit la fonction de compte $N_D(k)$ des valeurs $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ ordonnées en ordre croissant c'est-à-dire soit*

$$N_D(k) = \sum_{k_n < k} 1$$

alors

$$N_D(k) = \frac{S}{4\pi}k^2 - \frac{L}{4\pi}k + O(k^{\frac{2}{3}})$$

où $S = \pi r^2$ et où $L = 2\pi r$.

1.2. SÉPARATION DE VARIABLES, ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE BESSEL, FONCTIONS ET VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN SUR UN DOMAINE CIRCULAIRE

Soit $S(\alpha)$, le secteur du disque de rayon 1 d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ ou soit D le disque de rayon 1. Cette section montre comment la séparation de variables lors de la résolution de l'équation $\Delta u + \lambda u = 0$ sur $S(\alpha)$ ou sur D « engendre » l'équation différentielle de Bessel. Les fonctions de Bessel qui sont les solutions de l'équation en question représentent la partie radiale des fonctions propres du Laplacien sur un domaine circulaire. Il sera montré que dans le cas du disque D les fonctions de Bessel impliquées dans la résolution du problème à valeurs propres $\Delta u + \lambda u = 0$ ont des ordres entiers. De même pour le secteur $S(\alpha)$ il sera montré que les ordres des fonctions de Bessel impliqués ont des ordres réels de la forme $\frac{n\pi}{\alpha}$ pour $n = 1, 2, \dots$

Pour un exposé plus détaillé de ce qui va suivre dans cette partie, le lecteur peut se référer entres autres à [HiCo]. En ce qui concerne les fonctions de Bessel plus spécifiquement, le lecteur peut lire [Wa].

Le cas du secteur $S(\alpha)$ de rayon 1 et d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ est étudié plus en profondeur dans les lignes qui suivent. Le cas du disque est presque similaire à celui du secteur. Soit donc un secteur $S(\alpha)$ du disque de rayon 1 et d'angle α . Soit l'équation $(\Delta + \lambda)u = 0$ avec la condition de Dirichlet aux frontières c'est-à-dire $u(\partial S(\alpha)) = 0$. En coordonnées polaires, l'équation est

$$(\Delta + \lambda)u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0$$

En utilisant la séparation de variables avec $u(r, \theta) = R(r)M(\theta)$ et en substituant,

$$\frac{r^2 \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda R \right)}{R} = - \frac{\frac{d^2 M}{d\theta^2}}{M} = \text{constante} = c$$

Il faut donc résoudre

$$M''(\theta) + cM(\theta) = 0$$

où la solution de l'équation précédente est

$$M(\theta) = A_c \cos(\sqrt{c}\theta) + B_c \sin(\sqrt{c}\theta)$$

Comme il faut que la fonction M soit périodique c'est-à-dire $M(0) = M(\alpha)$, alors

$$\sqrt{c} = \frac{\pi n}{\alpha} :=: \sqrt{c_n}$$

Puisque c ne dépend que de n , il est commode de dénoter par M_{c_n} la solution de l'équation correspondante. Généralement,

$$M_{c_n}(\theta) = A_{c_n} \cos(\sqrt{c_n}\theta) + B_{c_n} \sin(\sqrt{c_n}\theta) ,$$

mais

$$\begin{aligned} M(0) &= M(\alpha) \\ A_{c_n} 1 + B_{c_n} 0 &= A_{c_n} \cos(n\pi) + B_{c_n} 0 \\ &\Downarrow \\ A_{c_n} &= 0 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$M_{c_n}(\theta) = B_{c_n} \sin(\sqrt{c_n}\theta)$$

Maintenant, en fixant la valeur n et en dénotant par $R(r) = R_n(r)$ la solution de l'équation

$$\frac{r^2 \left(\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \lambda_n R_n \right)}{R_n} = c_n$$

Il est démontré que l'équation précédente possède des solutions que pour un nombre dénombrable de valeurs de λ_n (voir [\[HiCo\]](#)). En dénotant ces valeurs par $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ et leurs solutions correspondantes par $R_{n,k}(r)$, alors

$$\frac{r^2 \left(\frac{d^2 R_{n,k}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{n,k}}{dr} + \lambda_{n,k} R_{n,k} \right)}{R_{n,k}} = c_n .$$

Remarque 1.2.1 (Fonction de Bessel et zéros des fonctions de Bessel). *La solution $R_{n,k}$ porte le nom de fonction de Bessel de premier type d'ordre $\frac{n\pi}{\alpha}$. L'ordre sera évident par ce qui suit. Les valeurs $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ seront les valeurs propres de l'équation originale $\Delta u + \lambda u = 0$ avec les conditions de Dirichlet aux frontières. Les valeurs $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ correspondent aux **carrés des zéros** des fonctions de Bessel qui sont en quantité dénombrable. Les fonctions de Bessel sont analytiques, ce qui a du sens puisque toutes les fonctions propres du Laplacien doivent être au moins lisses.*

Pour plus d'information sur les fonctions de Bessel, nous pouvons lire [\[Wa\]](#). De façon générale, la fonction de Bessel de premier type est analytique. C'est la solution en série de l'équation différentielle portant son nom et elle possède le développement que voici

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^s}{s!(n+s)!} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z} \text{ et } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Lorsque n est remplacé $\nu \in \mathbb{C}$, alors $J_{\nu}(z)$ est définie par la série suivante

$$J_{\nu}(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^s}{s!(\nu + s + 1)!} \quad \text{pour } \nu \in \mathbb{C} \text{ et } z \in \mathbb{C}.$$

Soit donc $J_{\nu}(z)$ la fonction de Bessel de premier type d'ordre réel ν (l'ordre comme l'argument peuvent être complexes de façon générale) et d'argument réel z . Soit également le k^{e} zéros de $J_{\nu}(z)$ noté par $j_k(\nu)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} R_{n,k}(r) &= J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \\ &= J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(j_k\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)r\right) \\ &\Downarrow \\ u_{n,k}(r, \theta) &= J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Pour vérifier que $u_{n,k}(r, \theta)$ est bien la bonne solution, il est commode pour l'instant seulement de réécrire

$$\begin{aligned}\lambda_{n,k} &:= \lambda \\ \frac{n\pi}{\alpha} &:= \nu .\end{aligned}$$

Voici deux faits concernant les fonctions de Bessel de premier type :

$$J'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z) \quad (1.2.1)$$

$$J_{\nu+2}(z) = \left(\frac{2(\nu+1)}{z} J_{\nu+1}(z) - J_\nu(z) \right). \quad (1.2.2)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(J_\nu(\sqrt{\lambda}r))' &= J'_\nu(\sqrt{\lambda}r)(\sqrt{\lambda}r)' \\ &= \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\ &= \sqrt{\lambda} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\lambda}r} J_\nu(\sqrt{\lambda}r) - J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \right) \\ &= \frac{\nu}{r} J_\nu(\sqrt{\lambda}r) - \sqrt{\lambda} J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r).\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}(J_\nu(\sqrt{\lambda}r))'' &= (J'_\nu(\sqrt{\lambda}r))' \\ &= \left(\frac{\nu}{r} J_\nu(\sqrt{\lambda}r) - \sqrt{\lambda} J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \right)' \\ &= \nu \left(\frac{r J'_\nu(\sqrt{\lambda}r) - J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^2} \right) - \sqrt{\lambda} (J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r))' \\ &\dots \\ &= \left(\frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \dots \\ &\quad - \sqrt{\lambda} \left(\frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) + \lambda J_{\nu+2}(\sqrt{\lambda}r) ,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
(\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) &= \sin(\nu\theta) \left(\frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\
&\quad - \sqrt{\lambda} \sin(\nu\theta) \left(\frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} + \frac{1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \\
&\quad + \sin(\nu\theta) \lambda J_{\nu+2}(\sqrt{\lambda}r) \\
&\quad - \frac{\nu^2}{r^2} \sin(\nu\theta) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\
&\quad + \lambda \sin(\nu\theta) J_\nu(\sqrt{\lambda}r)
\end{aligned}$$

qui implique que

$$\begin{aligned}
(\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) &= \left(\frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + \lambda \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
&\quad - \sqrt{\lambda} \left(\frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} + \frac{1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
&\quad + \lambda J_{\nu+2}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
&= \left(\frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + \lambda \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
&\quad - \sqrt{\lambda} \left(\frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} + \frac{1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
&\quad + \lambda \left(\frac{2(\nu+1)}{\sqrt{\lambda}r} J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) - J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \right) \sin(\nu\theta)
\end{aligned}$$

qui implique que

$$\begin{aligned}
(\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) &= \left(\frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + \lambda - \lambda \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
&\quad + \left(\frac{2\nu\sqrt{\lambda}}{r} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{r} - \frac{\sqrt{\lambda}\nu}{r} \dots \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda}\nu}{r} - \frac{2\sqrt{\lambda}}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta)
\end{aligned}$$

et ainsi

$$(\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) = 0$$

Remarque 1.2.2 (Multiplicité des valeurs propres pour un secteur). *Dans ce cas, toutes les valeurs propres $\lambda_{n,k}$ pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$ du Laplacien sur un secteur du disque sont simples en général sauf pour des angles critiques (voir entre autres la remarque 2.1.2). Les fonctions de Bessel d'ordre 0 ne sont jamais des fonctions propres du Laplacien sur un secteur.*

Remarque 1.2.3 (Multiplicité des valeurs propres pour le disque). *Soit D , le disque de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 . Les fonctions propres sont encore des fonctions de Bessel. Cependant les fonctions de Bessel d'ordre 0 sont admises. De façon générale,*

$$\begin{aligned} u_{0,k}(r, \theta) &= J_0(\sqrt{\lambda_{0,k}}r) \quad k \geq 1 \\ u_{n,k}(r, \theta) &= J_n(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \sin(n\theta) \quad \text{ou} \\ u_{n,k}(r, \theta) &= J_n(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \cos(n\theta) \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } k \geq 1 \end{aligned}$$

La multiplicité du cas correspondant à l'ordre $n = 0$ est ainsi simple et celles correspondant aux ordres $n \geq 1$ sont doubles.

1.3. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'OLVER DES ZÉROS DES FONCTIONS DE BESSEL

Les zéros de fonctions de Bessel sont les valeurs propres du Laplacien Δ sur un domaine circulaire, le disque ou un secteur du disque, comme il a été discuté précédemment.

Plusieurs développements asymptotiques des zéros des fonctions de Bessel et des zéros des dérivées des fonctions de Bessel existent. Par exemples, les développements d'Olver, de McMahon ou de Meissel (pour $J_n(n)$) pour ne citer que ces développements les plus connus. Ces développements sont utiles selon que l'ordre ou l'argument sont dans une certaine région du plan complexe. Ils existent par exemple des développement de Taylor pour les zéros de fonctions de Bessel d'ordre $\frac{2k+1}{2}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$ ou simplement pour les ordres entiers. Le lecteur peut lire [Ro] en ce qui concerne les développements de Taylor reliés aux zéros des fonctions de Bessel où une liste de problèmes ouverts est également présentée. Le développement qui est sans doute le plus utile est celui fourni par F.W.J.

Olver durant les années 50. Le développement asymptotique d'Olver a permis en outre une implémentation numérique stable dans plusieurs logiciels. Tout lecteur intéressé peut lire les nombreux articles d'Olver cités dans les références comme [O11], [O12], [O15], [O18] et [FaLoO1].

Avant de donner le développement asymptotique d'Olver, une brève introduction aux fonctions d'Airy s'impose. Le lecteur peut se référer à [O18], ce dernier ouvrage traite des fonctions « spéciales » comme les fonctions d'Airy et de Bessel. Une fonction d'Airy est une fonction qui est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - tw = 0.$$

L'équation précédente a deux solutions dénotées par Ai et Bi qui sont nommées respectivement fonction d'Airy de premier type et fonction d'Airy de deuxième type.

Les fonctions d'Airy Ai et Bi sont reliées aux fonctions de Bessel de premier type J_ν avec l'ordre $\nu = \frac{1}{3}$ comme suit

$$\begin{aligned} Ai(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{x}\left(J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) - J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\right) \quad t > 0 \\ Bi(t) &= \sqrt{\frac{x}{3}}\left(J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\right) \quad t > 0 \end{aligned}$$

Les relations précédentes sont connues sous le nom de « connection formulas ».

Les zéros de Ai seront dénotés par a_k avec $k = 1, 2, \dots$ et $0 > a_1 > a_2 > \dots$

Seule la fonction Ai sera utile pour développer les zéros de la fonction de Bessel J_ν d'ordre $\nu > 0$. Il est à noter que les zéros de Ai et de Bi sont tous négatifs. a_k possède également un développement asymptotique d'Olver (voir [O18]). Il est possible de démontrer en utilisant le développement asymptotique que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-a_k}{\left(\frac{3}{8}\pi(4k-1)\right)^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

Pour la suite, nous nous concentrerons sur les zéros de la fonction de Bessel de premier type J_ν pour $\nu > 0$. En dénotant par $j_\nu(k)$ le k^e zéro de $J_\nu(z)$ pour $z > 0$

et en dénotant par $\gamma_k = -a_k 2^{-\frac{1}{3}}$ alors

$$\begin{aligned} j_k(\nu) = & \nu + \gamma_k \nu^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{10} \gamma_k^2 \nu^{-\frac{1}{3}} + \frac{5 - \gamma_k^3}{350} \nu^{-1} \\ & - \frac{479 \gamma_k^4 + 20 \gamma_k}{63000} \nu^{-\frac{5}{3}} + \frac{20231 \gamma_k^5 - 27550 \gamma_k^2}{8085000} \nu^{-\frac{7}{3}} + \mathcal{O}(\nu^{-3}). \end{aligned}$$

La preuve de ce résultat est longue et complexe. Les idées de base se retrouvent principalement dans les deux longs articles [O11] et [O12].

Il est possible de constater grâce entres autres au développement ci-dessus de $j_\nu(k)$ que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{j_\nu(k)}{\nu} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.3.1)$$

Il est même prouvé pour $\nu > 0$ dans [QuWo] que

$$\nu - \frac{a_k}{2^{\frac{1}{3}}} \nu^{\frac{1}{3}} < j_k(\nu) < \nu - \frac{a_k}{2^{\frac{1}{3}}} \nu^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{20} a_k^2 \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}}. \quad (1.3.2)$$

Grâce à (1.3.1) et à (1.3.2), il est possible d'évaluer l'ordre de grandeur des zéros. Ceci sera utile ultérieurement (voir les remarques A.5.1 et 3.3.4) afin de connaître le degré de précision requis pour évaluer numériquement les zéros des fonctions de Bessel.

1.4. LES ENSEMBLES NODAUX DES FONCTIONS PROPRES ET LEURS STRUCTURES, CAS DU DISQUE ET DU SECTEUR EN EXEMPLES

Le théorème principal de cette section concerne le nombre de domaines nodaux qu'une fonction propre peut avoir. Il est énoncé entre autres dans [Sh]. Avant d'arriver au théorème, un rappel de ce qu'est l'ensemble nodal d'une fonction propre s'impose. De même, les exemples pour le secteur du disque $S(\alpha)$ de rayon 1 et d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ et le disque D de rayon 1 sont donnés.

L'ensemble nodal d'une fonction propre est son ensemble de zéro. Si la dimension du domaine est d , alors la dimension des ensembles nodaux est $d - 1$. En d'autres termes, pour la j^{e} fonction propre φ_j défini sur un domaine ouvert assez régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, si Z_j est l'ensemble des zéros, alors

$$Z_j = \left\{ \varphi_j(x) = 0, \quad x \in \Omega \right\}.$$

Z_j est un ensemble fermé.

Dans le cas d'un secteur $S(\alpha)$ de **rayon** 1 et d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$, une fonction propre typique est donnée par

$$u_{n,k}(r, \theta) = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right)$$

Par conséquent,

$$u_{n,k}(r, \theta) = 0 \Leftrightarrow J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \frac{n\pi\theta}{\alpha} &= d\pi \quad \text{pour } d = 0, 1, \dots, n \\ &\Updownarrow \\ \theta &= \frac{d\alpha}{n} \end{aligned}$$

lequel cas donne une suite de lignes angulaires décrites par les multiples entiers $d = 0, 1, \dots, n$ de l'angle $\frac{\alpha}{n}$. Le cas où

$$\begin{aligned} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ r &= \frac{\sqrt{\lambda_{n,j}}}{\sqrt{\lambda_{n,k}}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

donne une suite de cercles concentriques avec le cas correspondant à la frontière lorsque $j = k$, c'est-à-dire lorsque $r = 1$.

L'ensemble des zéros d'une fonction propre découpe le domaine de définition des fonctions propres en composantes connexes où la fonction propre alterne de signe. Dans le cas du disque ou d'un secteur circulaire, les composantes connexes ont la forme de secteurs circulaires comme il est possible de le voir sur les figures de la section 2.2.1. Une image vaut mille mots.

Remarque 1.4.1 (Nombre de composantes connexes).

(cas d'un secteur)

Pour une fonction propre donnée $u_{n,k}(r, \theta)$, le nombre de composantes connexes sur lesquelles la fonction propre alterne de signe est donnée par nk .

(cas du disque)

Pour les fonctions propres sur le disque de multiplicité 1 c'est-à-dire pour celles de la forme $u_{0,k}(r, \theta)$, le nombre de composantes connexes est k . Pour les fonctions propres de multiplicité 2 c'est-à-dire celles de la forme $u_{n,k}(r, \theta)$ avec $n = 1, 2, \dots$, le nombre de composantes connexes est $2nk$.

Avant de conclure cette section, voici un théorème célèbre dû à Courant qui sera très utile pour la prochaine section qui peut être retrouvé entre autres dans [Sh].

Théorème 1.4.1 (Théorème de Courant sur les ensembles nodaux). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine tel que $\partial\Omega$ est suffisamment régulier par morceaux. Soit λ_m , la m^e valeur propre. Alors pour une fonction propre u_m correspondant à λ_m , le nombre de domaines nodaux est au plus m .

Chapitre 2

LES ENSEMBLES NODAUX DES FONCTIONS PROPRES

Soit D ou $S(\alpha)$, le disque de rayon 1 ou un secteur de rayon 1 et d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$. Soit Δ l'opérateur différentiel de Laplace. Soit λ , une valeur propre Δ telle que $(\Delta + \lambda)u = 0$ avec $u \in C^\infty$ étant la fonction propre associée à λ .

Dans un premier temps, une conjecture concernant la 1^{re} ligne nodale du problème de Dirichlet sur un domaine bidimensionnel est étudiée. La conjecture en question a été soulevée par Payne et affirme que pour tout domaine bidimensionnel, la 1^{re} ligne nodale touche toujours la frontière. Deux cas extrêmes s'offrent à la conjecture, le rectangle et le secteur circulaire. Le cas du rectangle étant très simple puisqu'il est facile d'identifier où se trouve exactement la première ligne nodale comme il sera montré plus loin. Le cas du secteur étant un peu plus intéressant, cela motivant en soi la prochaine partie. À la fin de la 1^{re} section, le lecteur trouvera une proposition donnant l'angle critique α_0 pour lequel tout secteur d'angle $\alpha < \alpha_0$ a une ligne nodale en coordonnées polaires de la forme $r = \text{const}$ et pour lequel tout secteur d'angle $\alpha > \alpha_0$ a une ligne nodale en coordonnées polaires de la forme $\theta = \text{const}$. De même, lorsque $\alpha = \alpha_0$, nous verrons que la ligne nodale est indéterminée.

Dans un deuxième temps, soit un entier $m > 1$ généralement très grand comme $m = 1 \cdot 10^6$ par exemple. Comment construire la suite des valeurs propres $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ en ordre croissant de l'opérateur Δ sur D ou $S(\alpha)$? En d'autres termes, il faut établir un algorithme efficace pour déterminer le spectre jusqu'au rang m . Par

efficace, cela veut dire ne pas résoudre l'équation différentielle avec des méthodes comme les éléments finis qui ne permettraient pas de construire la suite spectrale pour des valeurs très grandes comme $m = 1 \cdot 10^6$ et ni même d'identifier les ensembles nodaux de façon exacte. Par **efficace**, il faut se servir de toute la théorie décrite jusqu'à maintenant et du fait que dans certains logiciels, en l'occurrence Maple, il existe des routines très stables permettant de trouver les zéros des fonctions de Bessel. La construction de la suite spectrale jusqu'à m est équivalente à dénombrer le nombre de composantes connexes disjointes obtenues pour chaque u_j en enlevant du domaine original les ensembles nodaux des fonctions propres u_j pour $j = 1, 2, \dots, m$. Les valeurs propres sont données en fonction de deux paramètres n et k entiers non-négatifs et connaître le spectre jusqu'à l'entier m , consistera à établir une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} .

2.1. LA PREMIÈRE LIGNE NODALE DE LA DEUXIÈME FONCTION PROPRE

Dans cette partie, la première ligne nodale de la deuxième fonction propre de Δ sur un domaine convexe du plan est étudiée. Cette ligne est l'ensemble des zéros de la deuxième fonction propre u_2 du Laplacien d'un domaine convexe du plan, avec des conditions de Dirichlet sur la frontière. Pour la première fonction propre, u_1 , elle ne possède qu'une seule ligne nodale qui s'annule sur la frontière du domaine en question et qui, par conséquent, est triviale. Quant à u_2 , par le théorème de Courant sur les ensembles nodaux, elle possède au plus 2 lignes ; la première étant toujours triviale et s'annulant sur la frontière et quant à la deuxième ligne, non triviale celle-ci, elle peut toucher à la frontière ou être entièrement contenue à l'intérieur du domaine.

Mathématiquement parlant, soit Ω un domaine convexe du plan. Soit u_2 , la deuxième fonction propre de Δ , c'est-à-dire $\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0$ et $u_2(\partial\Omega) = 0$. Soit $\Gamma = \{z \in \Omega, u_2(z) = 0\}$, alors deux possibilités s'imposent : $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega = \emptyset$ ou $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Dans le cas où $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega = \emptyset$, alors $\bar{\Gamma} \subsetneq \Omega$.

L.E. Payne a conjecturé que $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ pour tout domaine du plan. S.-T. Yau a conjecturé que $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ pour tout domaine convexe du plan. Pour un domaine borné convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Melas en 1992 dans [Mela] a montré le théorème suivant.

Théorème 2.1.1 (Melas). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné convexe avec des frontières C^∞ , alors la ligne nodale de la deuxième fonction propre u_2 doit intersecter la frontière $\partial\Omega$ exactement en deux points.*

Pour un secteur $S(\alpha)$ de rayon 1 qui est un domaine borné convexe du plan, la ligne nodale de la deuxième fonction propre peut donc toucher $\partial S(\alpha)$ de deux façons. La ligne nodale intersecte la partie de $\partial S(\alpha)$ décrite par $r = 1$ ou les deux parties décrites par $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$.

Question. Quelle doit être la valeur de α faisant en sorte que nous avons une situation plutôt qu'une autre ?

Remarque 2.1.1 (Deux possibilités pour u_2). *u_2 a donc deux sous domaines simplement connexes disjoints séparés par une ligne nodale, radiale ou angulaire. Les seuls zéros admis des fonctions de Bessel sont $j_1(\frac{\pi}{\alpha})$, $j_1(2\frac{\pi}{\alpha})$ et $j_2(\frac{\pi}{\alpha})$. Puisque $\lambda_1 = j_1(\frac{\pi}{\alpha})$ nécessairement, alors les deux seules autres possibilités sont $j_1(2\frac{\pi}{\alpha})$ et $j_2(\frac{\pi}{\alpha})$ chacun donnant respectivement une ligne nodale angulaire et une ligne nodale radiale et, dans chaque cas, deux sous domaines simplement connexes où u_2 alterne de signe.*

La fonction $j_k(\nu)$ avec $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$ étant lisse et croissante avec l'ordre ν , alors la ligne nodale radiale se produit si et seulement si

$$j_2^2(\nu) < j_1^2(2\nu) \Leftrightarrow j_2(\nu) < j_1(2\nu)$$

et l'équation de la ligne radiale est donnée par

$$r = \frac{j_1^2(\nu)}{j_2^2(\nu)} = \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_2(\alpha)} \text{ avec } \nu = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Quant à la ligne nodale angulaire, elle se produit si et seulement si

$$j_2^2(\nu) > j_1^2(2\nu) \Leftrightarrow j_2(\nu) > j_1(2\nu)$$

et l'équation de la ligne angulaire est donnée par

$$\theta = \frac{\alpha}{2}.$$

Lorsque $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$ satisfait l'équation $j_1(2\nu) = j_2(\nu)$, alors l'angle α est critique et la deuxième valeur propre a une multiplicité double. Si nous résolvons l'équation

$$j_2(\nu) - j_1(2\nu) = 0,$$

alors la solution est

$$\nu \approx 2.823823 \Leftrightarrow \alpha \approx 1.112531 \approx 63.743334 \text{ degrés}$$

et la 1^{re} ligne nodale n'est donc pas définie. En effet, soit

$$u_{1,2} = J_{\frac{\pi}{\alpha_0}}\left(j_2\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)r\right) \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha_0}\right) \quad (2.1.1)$$

$$u_{2,1} = J_{\frac{2\pi}{\alpha_0}}\left(j_1\left(2\frac{\pi}{\alpha_0}\right)r\right) \sin\left(\frac{2\pi\theta}{\alpha_0}\right) \quad (2.1.2)$$

les deux fonctions propres associées respectivement aux zéros $j_2\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)$ et $j_1\left(2\frac{\pi}{\alpha_0}\right)$.

Comme

$$\lambda_2 = j_2^2\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right) = j_1^2\left(2\frac{\pi}{\alpha_0}\right)$$

alors n'importe quelles combinaisons linéaires des fonctions propres (2.1.1) et (2.1.2) est une solution de l'équation $\Delta(u) + \lambda u = 0$ sur $S(\alpha_0)$.

Remarque 2.1.2 (1^{re} ligne nodale et secteur critique). *Étant donné un angle α et le secteur du disque correspondant d'angle α , les valeurs propres sont généralement de multiplicité 1. Soit l'angle critique α_0 et l'ordre associé $\nu_0 = \frac{\pi}{\alpha_0}$ tel que $j_2(\nu_0) - j_1(2\nu_0) = 0$. Lorsque l'angle $\alpha = \alpha_0$, la deuxième valeur propre a une multiplicité de 2. La première ligne nodale n'est donc pas définie pour cette valeur critique α puisque n'importe quelles combinaisons linéaires des fonctions propres (2.1.1) et (2.1.2) est une solution du problème $\Delta(u) + \lambda u = 0$ sur $S(\alpha_0)$.*

Il est intéressant de visualiser les ensembles nodaux de la 2^e valeur propre pour quelques valeurs α ou, en d'autres termes, la 1^{re} ligne nodale. Nous voyons en effet que lorsque $\alpha \rightarrow \alpha_0$, la ligne nodale est indéterminée, en effet, Matlab prend au « hasard » une combinaison linéaire des deux fonctions propres. **Les angles mentionnés en-dessous de chaque graphique sont exactes et ne sont pas approximatives. Le but étant de donner à Matlab des angles se rapprochant de plus en plus près de α_0 .**

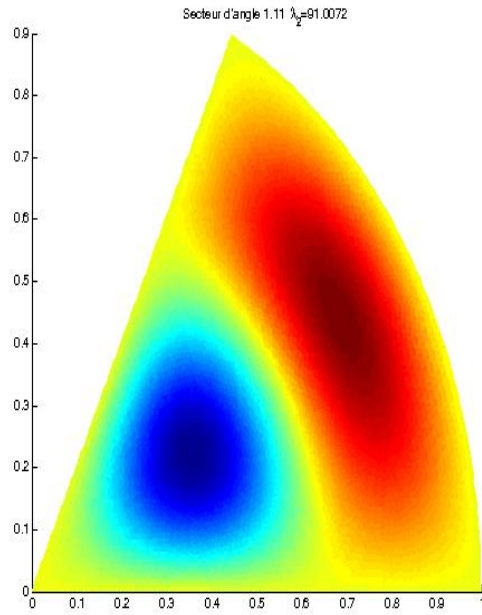


FIGURE 2.1. 1^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.11$, $\lambda_2 \approx 91.0072$

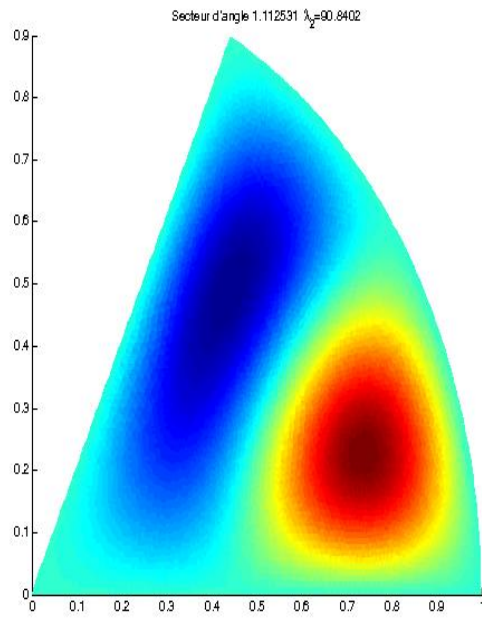


FIGURE 2.2. 1^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.112531$, $\lambda_2 \approx 90.8402$

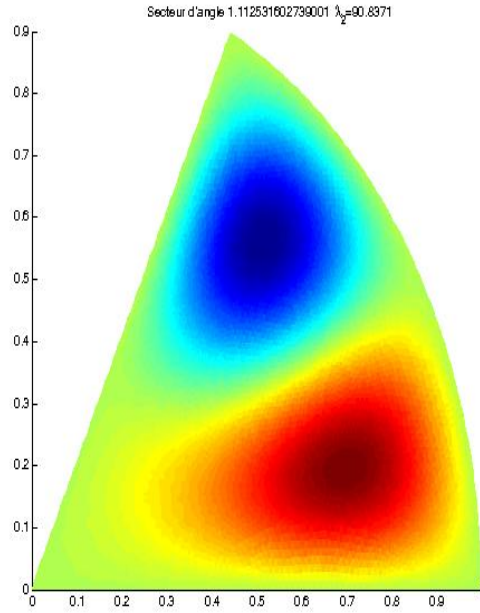


FIGURE 2.3. 1^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.112531602739001$, $\lambda_2 \approx 90.8371$

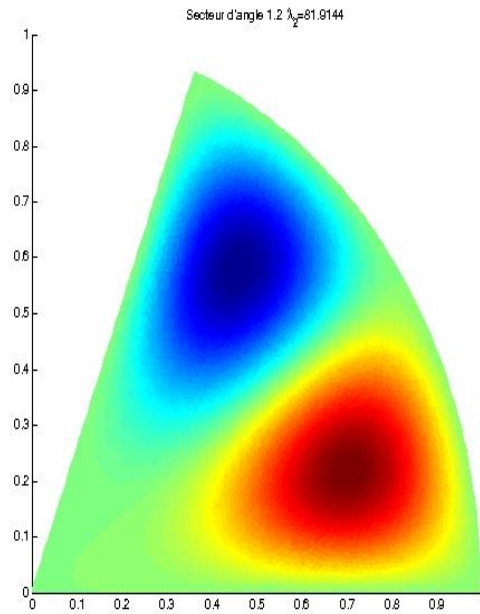


FIGURE 2.4. 1^{re} ligne nodale, $\alpha = 1.2$, $\lambda_2 \approx 81.9144$

Voici donc à la lumière de ce qui précède la petite proposition suivante concernant l'« emplacement » de la première ligne nodale de la deuxième fonction propre.

Proposition 2.1.1 (« Emplacement » de la première ligne nodale). *Soit $S(\alpha)$ un secteur du disque de rayon 1 et d'angle α . Soit α_0 la solution de l'équation*

$$j_2\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right) = j_1\left(\frac{2\pi}{\alpha_0}\right)$$

où $j_k(\nu)$ est le k^{e} zéro de la fonction de Bessel de premier type d'ordre $\nu > 0$. Alors si l'angle α du secteur $S(\alpha)$ est supérieur à α_0 , alors la première ligne nodale de la deuxième fonction propre est de la forme $\theta = \frac{\alpha}{2}$ sinon elle est de la forme $r = \frac{j_1^2(\nu)}{j_2^2(\nu)}$ avec $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$.

Démonstration 2.1.1. Lire la remarque 2.1.1.

2.2. ALGORITHME POUR ORDONNER LES VALEURS PROPRES ET DÉTERMINER LA STRUCTURE DES ENSEMBLES NODAUX

Question Supposons donné un entier $m > 1$. Est-il possible de déterminer efficacement le spectre du Laplacien sur le disque D ou un secteur $S(\alpha)$ de rayon 1 jusqu'à l'entier m ? En d'autres termes, comment obtenir toutes les valeurs propres λ_j pour $j = 1, \dots, m$ telles que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$$

Réponse Répondre à la question précédente, c'est connaître la bijection entre $j_k^2(\nu)$ et λ_m où $\nu = n$ pour le disque D et où $\nu = \frac{n\pi}{\alpha}$ pour le secteur $S(\alpha)$. Nous avons donc un problème de classification des valeurs $j_\nu^2(k)$. Étant donné m , quelles valeurs de n et k sont admissibles en fonctions de m ? Dans ce qui suit, nous écrirons $\nu = \nu(n)$.

Idée de l'algorithme Par le théorème de Courant, il faut trouver toutes les paires $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ telles que $nk \leq m$, ce sont les paires admissibles. De même, la connaissance de toutes ces paires (n, k) implique la connaissance des paires (n', k') telles que $n'k' \leq m'$ pour $m' \leq m$. Par conséquent, évaluer $j_{\nu(n)}^2(k)$ pour toutes les paires (n, k) telles que $nk \leq m$ assure d'obtenir $\{\lambda_j\}_{j=1}^m \subseteq \{j_{\nu(n)}^2(k)\}_{nk \leq m}$. Il ne reste donc qu'à ordonner et à prendre en compte la multiplicité dans le cas du disque. Dans le cas de $S(\alpha)$, il ne faut qu'ordonner linéairement $\{j_{\nu(n)}^2(k)\}_{nk \leq m}$ et prendre les m premières valeurs, ce qui donne $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$. Dans le cas du disque, il faut regarder les valeurs où $n = 0$ et celles $n \neq 0$ et extraire

les valeurs de $\{j_{\nu(n)}^2(k)\}_{nk \leq m}$ en répétant deux fois celles où $n \neq 0$ pour obtenir $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$.

L'algorithme précédent a été implémenté en Maple et est donné en annexe.

Remarque 2.2.1 (Améliorations possibles). *Comme à n'importe quelle programme informatique, plusieurs améliorations peuvent être apportées.*

1) *La première, pour ceux dont les ressources le permettent, seraient de paralléliser le code avec MPI.*

2) *Afin de réduire la taille en mémoire utilisée et également de permettre de sauvegarder en mode binaire (car Maple ne fait pas la distinction entre le mode binaire et ascii sur les stations Unix), reprogrammer en C++ avec par exemple la librairie NTL (Number Theory Library) compilée avec GMP (Gnu Multiple Precision arithmetic) procureait sans aucun doute des économies de temps et d'espace. Cela implique cependant d'implémenter une fonction pour le calcul des zéros de fonctions Bessel de premier type qui serait stable, ce qui n'est pas nécessairement évident à faire efficacement.*

Remarque 2.2.2 (Avantages de l'algorithme). *À la connaissance de l'auteur, l'algorithme donné ici est un des plus efficace pour déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur Δ sur le disque. Il ne requiert aucunement de résoudre l'équation différentielle $\Delta u + \lambda u = 0$ sur le disque. Calculer les zéros des fonctions de Bessel étant beaucoup plus rapide et stable que de résoudre l'équation différentielle, l'algorithme est d'autant plus rapide et efficace. Également plusieurs des méthodes numériques pour résoudre l'équation différentielle requiert l'utilisation de matrices donc le nombre d'entrées est proportionnel au carré du nombre de valeurs propres désirées et, par conséquent, il serait inutile d'essayer de calculer par exemple les $1 \cdot 10^6$ premières valeurs propres en résolvant l'équation différentielle avec ces méthodes numériques, ce qui par contre a été fait raisonnablement avec l'algorithme.*

2.2.1. Résultats comparatifs

Le spectre du disque pour les valeurs propres $\{\lambda_j\}_{j=1}^{10^6}$ a été calculé environ en 114576.4710 secondes de calcul soit environ 31 heures 50 minutes sur un simple

PC à deux processeurs avec 2GB de RAM. La liste d'une taille de 30 **MB** est disponible auprès de l'auteur. Dans ce fichier texte, la 1^{re} colonne indique le rang de la fonction/valeur propre, la 2^e colonne indique la valeur propre, la 3^e indique l'ordre de la fonction de Bessel et la 4^e indique l'index du zéro de fonction Bessel. Dans ce qui suit, pour chacune des valeurs propres listées dans les tableaux, la représentation en courbes de niveaux de la fonction propre correspondante est montrée plus loin sur les graphiques. Grâce aux courbes de niveaux, il est facile d'y compter le nombre de domaine nodaux et de **comparer** avec les valeurs de k (index) et n (ordre) dans les tableaux. Les courbes de niveaux des fonctions propres ont été obtenues à l'aide de Matlab en solutionnant les équations différentielles à l'aide de la méthode des éléments finis. Par exemple, à des fins comparatives, les 100 premières valeurs propres et leurs fonctions propres associées ont été obtenues en près de 3 jours de calcul en Matlab. En plus de prendre un temps excessivement long, la visulation des courbes à niveau devient très difficile lorsque le rang des fonctions propres est élevé.

Des programmes en Matlab sont également donnés en annexe. Ces programmes permettent de résoudre les problèmes de valeurs propres de même que de visualiser les ensembles nodaux des fonctions propres.

m = rang	λ_m (Matlab)	$j_k^2(n)$ (Maple)	n = ordre	k = index
3	149.4956	149.4529	2	1
6	278.9782	278.8316	3	1
7	310.5226	310.3223	1	4
16	646.8263	646.0310	5	1
25	991.8437	989.7291	3	5
27	1088.4330	1085.9440	4	4
30	1157.8175	1155.2319	5	3

TABLE 2.1. Résultats pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$ de rayon 1

m = rang	λ_m (Matlab)	$j_k^2(n)$ (Maple)	n = ordre	k = index
3	23.0006	22.9968	3	1
9	58.4266	58.4019	7	1
11	69.3865	69.3521	8	1
19	108.3025	108.2183	2	3
26	152.1173	151.9596	14	1
29	165.6505	165.4521	5	3

TABLE 2.2. Résultats pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha = 2 \exp(1) \approx 5.4366$ de rayon 1

Les figures 2.5 et 2.6 représentent les domaines nodaux des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres du tableau, le nombre de composantes connexes est donné par nk .

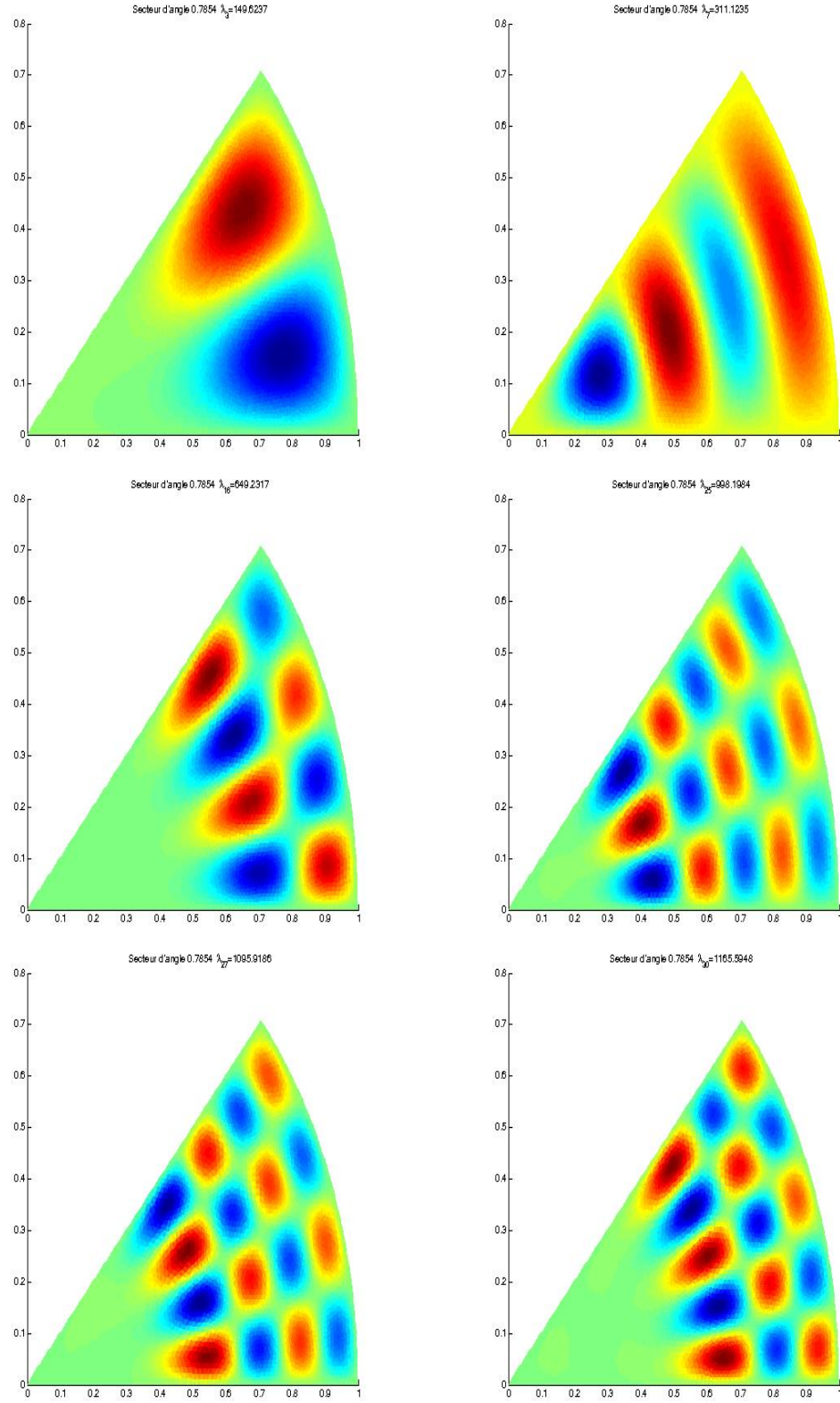


FIGURE 2.5. Domaines nodaux de la 3^e, 7^e, 16^e, 25^e, 27^e et 30^e fonction propre pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$ de rayon 1

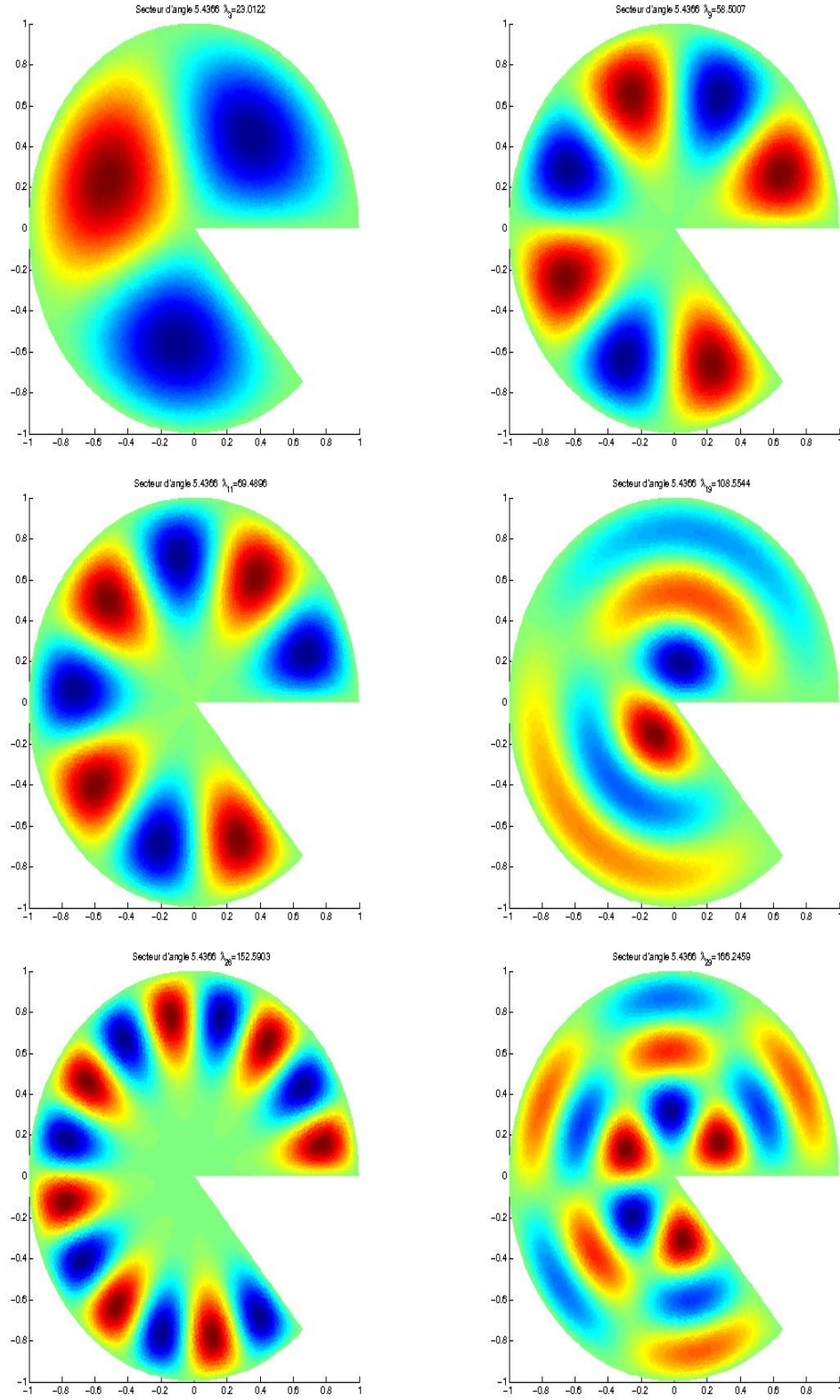


FIGURE 2.6. Domaines nodaux de la 5^e, 9^e, 11^e, 19^e, 26^e et 29^e fonction propre pour le secteur $S(\alpha)$ avec $\alpha \approx 5.4366$ de rayon 1

m = rang	$j_k^2(n)$ (Maple)	n = ordre	k = index
1	5.783186	0	1
4	26.374616	2	1
5	26.374616	2	1
6	30.471262	0	2
7	40.706466	3	1
8	40.706466	3	1
28	135.020709	2	3
29	135.020709	2	3
30	139.040284	0	4
31	149.452881	8	1
32	149.452881	8	1
33	152.241154	5	2
34	152.241154	5	2
...			
1000000	4004017.840283	1533	69
2000000	8005695.299643	391	714
3000000	12006894.927313	305	955
4000000	16008031.629743	1820	498
5000000	20008771.752617	1624	707
6000000	24009692.370612	713	1220
7000000	28010694.266301	3663	276
7912680	31685063.008767	0	1792

TABLE 2.3. Résultats pour le disque

Les figures 2.7 et 2.8 représentent les domaines nodaux des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres du tableau, le nombre de composantes connexes est donné par $2nk$ si $n \geq 1$ (multiplicité 2) et par k si $n = 0$ (multiplicité 1).

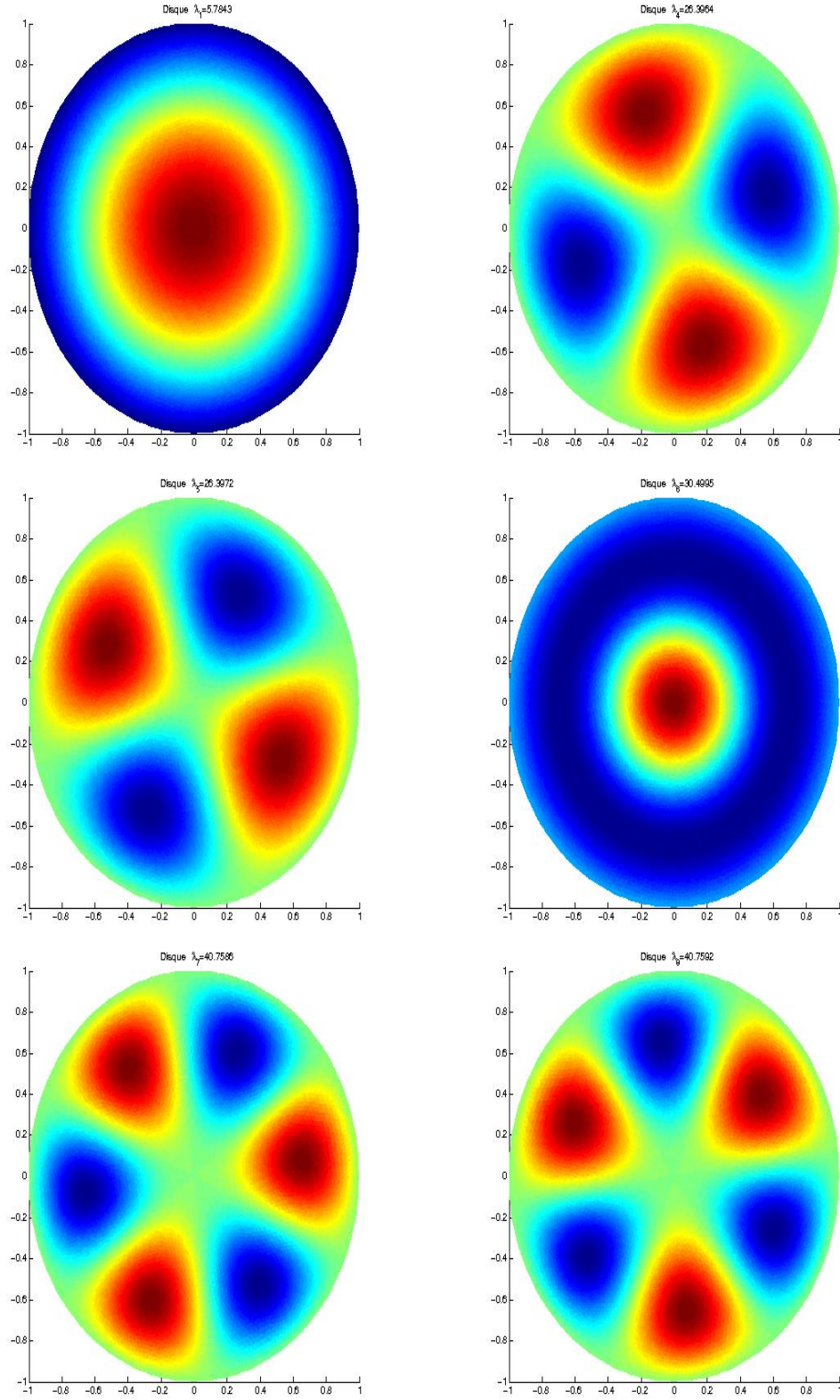


FIGURE 2.7. Domaines nodaux de la 1^{re}, 4^e, 5^e, 6^e, 7^e et 8^e fonction propre pour le disque D de rayon 1

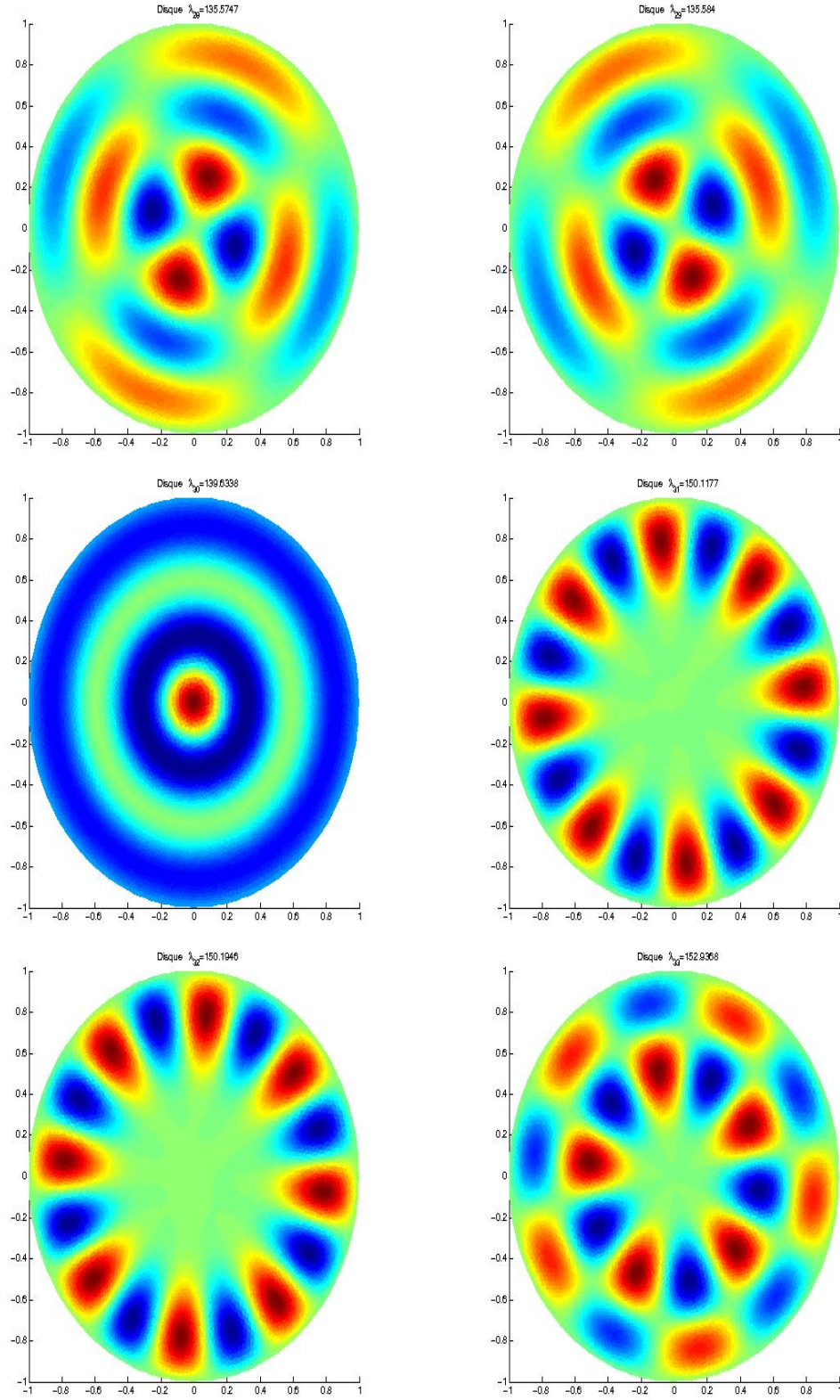


FIGURE 2.8. Domaines nodaux de la 28^e, 29^e, 30^e, 31^e, 32^e et 33^e fonction propre pour le disque D de rayon 1

Chapitre 3

LOI DE WEYL POUR LE DISQUE

Dans cette section, une explication approfondie de l'article [KF] est donnée. C'est dans cet article qu'il a été montré comment la loi de Weyl pour le disque D de rayon r est dans l'ordre $2/3$. Je tiens à remercier Igor Wigman et Dominique Rabet pour les discussions très enrichissantes que nous avons tenues afin d'éclaircir les multiples points très obscures de l'article.

L'article montre que la loi de Weyl, en débutant avec le problème $\Delta u + k^2 u = 0$, pour le disque D de rayon r est dans l'ordre $2/3$. En d'autres termes, soit le problème à valeur propre $-\Delta u = k^2 u$ avec $u|_{\partial D} = 0$. Soit la fonction de compte, $N_D(k)$, des valeurs propres $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ ordonnées en ordre croissant c'est-à-dire soit

$$N_D(k) = \sum_{k_n < k} 1$$

alors il est montré que

$$N_D(k) = \frac{S}{4\pi} k^2 - \frac{L}{4\pi} k + O(k^{\frac{2}{3}})$$

où $S = \pi r^2$ et où $L = 2\pi r$.

Afin d'alléger la notation, nous écrirons simplement $N(\lambda)$ au lieu de $N_D(\lambda)$. Seulement pour l'explication du théorème de Kuznetsov et Fedosov, nous utiliserons k au lieu de λ afin de conserver la notation identique à celle de l'article facilitant ainsi les références.

Avant de commencer à expliquer l'article, je tiens à faire un « détour » théorique sur l'approximation uniforme de la fonction de Bessel de premier type, $J_n(x)$ pour $x > n > 0$. Les fonctions de Bessel de premier type d'ordre $n = 0, 1, 2, \dots$ sont au

coeur de l'étude du spectre du Laplacien sur le disque. Ce « détour » se justifie d'une part parce que les auteurs donne une formule asymptotique pour $J_n(x)$ pour laquelle il faut travailler quelque peu avant d'y arriver et, d'autre part, parce que la formule donnée n'est pas effective tandis que je montre comment obtenir une expansion uniforme asymptotique effective c'est-à-dire sans terme O . La théorie sur les expansions uniformes des fonctions a été principalement développée par F.W.J. Olver dans les années 1950.

À la fin de ce chapitre, je donne un algorithme permettant de calculer efficacement et exactement $N(\lambda)$. En utilisant la monotonie des zéros des fonctions de Bessel ainsi qu'un principe de « marche » qui consiste à faire des retours en arrière et des montées en alternance sur des paires d'entiers bien déterminés par le problème, nous verrons qu'il est possible d'évaluer $N(\lambda)$ efficacement sans avoir à calculer naïvement toutes les valeurs propres telles que $\lambda_j \leq \lambda$. Par méthode naïve, je veux signifier l'utilisation de l'algorithme de la section 2.2 afin de déterminer la valeur du rang maximale de la valeur propre correspondant à la valeur de $N(\lambda)$.

3.1. APPROXIMATION UNIFORME DE LA FONCTION DE BESSEL DE PREMIER TYPE

Le lemme suivant découle de deux théorèmes qui seront exposés bientôt. La partie la plus difficile a été d'évaluer les variations totales de certaines fonctions qui apparaîtront bientôt. Il est à noter que les auteurs de [LaWo] affirment avoir analytiquement trouvé les points stationnaires des fonctions en question que vous pouvez consulter à la section 3.1.1 sans le montrer dans leur article, ils ne se contentent que de donner les valeurs numériques de variations totales qui sont évidemment les mêmes que les miennes sans même donner explicitement les fonctions comme je l'ai fait. Certaines des fonctions impliquées permettant de borner l'approximation d'Olver avaient déjà été obtenues par Olver, je me suis contenté de les recalculer numériquement pour obtenir plus de décimales qu'Olver a pu le faire avec les ordinateurs des années 50. Les résultats utiles pour cette section se retrouvent dans [O13], [O14] et [O16].

Lemme 3.1.1. Soit $x > n > 0$, $J_n(x)$ la fonction de Bessel de premier type et

$$f_n(x) = (1 + \delta_3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (x^2 - n^2)^{\frac{1}{4}} J_n(x) \quad (3.1.1)$$

alors l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} \left| f_n(x) - \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) \right| &\leq \frac{u_1}{\eta} + \frac{s_2}{n} \\ &+ \left(|R_2| + \frac{s_1}{n^2} + \frac{u_1 s_1}{n^2 \eta} + \frac{|R_2| s_1}{n^2} + \frac{|v_1| s_2}{n \eta} + \frac{|R'_2| s_2}{n} + \sqrt{\pi} |\epsilon_3| \right) \end{aligned}$$

où $s_1, s_2, u_1, v_1, R_2, R'_2, \delta_3, \epsilon_3$ sont exposés plus loin et où η est comme suit

$$\eta = \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos\left(\frac{n}{x}\right)$$

De même, pour une valeur fixe arbitraire de x , il existe $n_x < x$ telle que

$$f_n(x) = \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Remarque 3.1.1 (n_x). La valeur n_x peut être bien approximé en utilisant l'excellente approximation de $\tilde{\eta}(y) = \sqrt{1 - y^2} - y \arccos(y)$ pour $y \in (0, 1)$ qu'est

$$1 < \frac{(1 - y)^{\frac{3}{2}}}{\tilde{\eta}(y)} < \frac{3}{4} \sqrt{2}.$$

En effet, de par l'inégalité de la remarque précédente, qui m'a été fournie par Igor Wigman, avec $0 < y = \frac{n}{x} < 1$,

$$(1 - y)^{\frac{3}{2}} < \frac{3\sqrt{2}}{4} \tilde{\eta}(y) \Rightarrow \frac{4x}{3\sqrt{2}} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\frac{3}{2}} < x \tilde{\eta}\left(\frac{n}{x}\right) = \eta(n, x)$$

et, par conséquent,

$$1 < \frac{4x}{3\sqrt{2}} \left(1 - \frac{n}{x}\right)^{\frac{3}{2}} < \eta(x, n) \Leftrightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{4x}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 - \frac{n}{x} \Leftrightarrow n < x - \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$$

Il est à noter que $x - x^{\frac{4}{9}} < x - \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$ pour $x > \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^6 \approx 1.423828$.

De façon équivalente **comme il en ressortira du théorème 3.1.1**,

$$f_n(x) = \theta_1(\eta) + \theta_1(\eta) \frac{A_1(\zeta)}{n^2} + \frac{1}{n} \theta_2(\eta) (-\zeta)^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta) + \sqrt{\pi} \epsilon_3 \quad (3.1.2)$$

où

$$\begin{aligned} \theta_1(\eta) &= \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{u_1}{\eta^1} + R_2 \\ \theta_2(\eta) &= \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) - \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{v_1}{\eta^1} + R'_2 \end{aligned}$$

alors

$$J_n(x) = \frac{1}{1 + \delta_3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^2 - n^2)^{-\frac{1}{4}} f_n(x)$$

Remarque 3.1.2 (Dénombrement des zéros de $J_n(x)$). *Seule la connaissance de $f_n(x)$ est nécessaire au dénombrement des zéros de $J_n(x)$.*

Avant de débiter la preuve, voici les deux théorèmes qui seront utilisés pour prouver le lemme et se retrouvant respectivement dans [O17] et [FaLoOl].

Avant d'énoncer les théorèmes, voici les définitions des fonctions qui apparaîtront dans les théorèmes. Dans ce qui suit, $Ai(x)$ et $Bi(x)$ dénotent respectivement la fonction d'Airy de premier type et deuxième type. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{Bi(x)}{Ai(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } c \leq x \leq \infty \\ E(x) &= 1 \quad \text{pour } -\infty \leq x \leq c \\ M(x) &= (E^2(x)Ai^2(x) + E^{-2}(x)Bi^2(x))^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ \lambda &= \sup_{x \in \mathbb{R}} (\pi |x|^{\frac{1}{2}} M^2(x)) \\ &\approx 1.039522542988 \quad \text{à } x \approx 1.321915092767 \end{aligned}$$

où c est la plus grande valeur négative telle que $Ai(x) = Bi(x)$. **Nous nous entendons bien que λ n'a aucun lien avec les valeurs propres. C'est la lettre utilisée par Olver pour désigner le suprémum ci-dessus.**

Quant au symbole $\mathcal{V}_{(a,b)}(g)$, il dénote la variation totale d'une fonction g sur un intervalle $(a, b) \subseteq \text{dom}(g)$. Pour plus d'information, voir le 1^{er} chapitre de [O18].

Théorème 3.1.1 (Approximation uniforme de $J_n(nz)$). *Soit $J_n(nz)$ la fonction de Bessel de premier type d'ordre $n \in \mathbb{R}$ et d'argument nz avec $z \in \mathbb{C}$, alors l'expansion uniforme de $J_n(nz)$ est donné par*

$$J_n(nz) = \frac{1}{1 + \delta_{2l+1}} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{4\zeta}{1 - z^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left(Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) \sum_{s=0}^l \frac{A_s(\zeta)}{n^{2s}} \right. \quad (3.1.3)$$

$$\left. + \frac{Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{n^{\frac{4}{3}}} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{B_s(\zeta)}{n^{2s}} + \epsilon_{2l+1} \right) \quad (3.1.4)$$

où les termes d'erreur δ_{2l+1} et ϵ_{2l+1} sont donnés comme suit

$$|\delta_{2l+1}| \leq \frac{2}{n^{2l+1}} \exp \left(2\lambda \frac{1}{n} \mathcal{V}_{-\infty, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)) \right) \mathcal{V}_{-\infty, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_l(\zeta)) \quad (3.1.5)$$

$$|\epsilon_{2l+1}| \leq \frac{2}{n^{2l+1}} \exp \left(2\lambda \frac{1}{n} \mathcal{V}_{\zeta, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)) \right) \mathcal{V}_{\zeta, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_l(\zeta)) \frac{M(n^{\frac{2}{3}} \zeta)}{E(n^{\frac{2}{3}} \zeta)} \quad (3.1.6)$$

où $\mathcal{V}_{\zeta, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_l(\zeta)) \leq \mathcal{V}_{-\infty, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_l(\zeta))$.

Le lecteur intéressé à connaître les récurrences permettant de calculer A_s et B_s dans le théorème qui suit peuvent consulter [O14]. J'ai trouvé $A_1(\zeta)$ et $B_1(\zeta)$ en résolvant les récurrences, mais cela ne requiert qu'une bonne dose de patience et je me suis contenté de les donner à la section 3.1.1. ζ est donné plus loin à l'équation (3.1.16).

Remarque 3.1.3 (n et z). Dans ce qui suit, seuls les cas où $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{R}^+$ seront utiles.

Théorème 3.1.2 (Approximations uniformes de Ai et Ai'). Soit Ai la fonction de Airy de premier type sa dérivée Ai' . Soit $x > 0$ et $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \xi$. Alors

$$Ai(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x^{\frac{1}{4}}}} \left(\cos \left(\xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{2}S - \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} \right. \quad (3.1.7)$$

$$\left. + \sin \left(\xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{2}S - 1 \rfloor} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} + R_S \right) \quad (3.1.8)$$

où

$$|R_S| \leq 2 \exp \left(\frac{5}{36\xi} \right) \frac{u_S}{\xi^S}$$

et

$$Ai'(-x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left(\sin \left(\xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{2}S - \frac{1}{2} \rfloor} (-1)^s \frac{v_{2s}}{\xi^{2s}} \right. \quad (3.1.9)$$

$$\left. - \cos \left(\xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{1}{2}S - 1 \rfloor} (-1)^s \frac{v_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} + R'_S \right) \quad (3.1.10)$$

où

$$|R'_S| \leq 2 \exp \left(\frac{7}{36\xi} \right) \frac{|v_S|}{\xi^S}$$

avec

$$u_s = \frac{2^s \Gamma(3s + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} 3^{3s} \Gamma(2s + 1)} \quad s > 0 \quad (3.1.11)$$

$$v_s = -\frac{(6s + 1)}{(6s - 1)} u_s \quad s > 0 \quad (3.1.12)$$

$$u_0 = 1 \quad (3.1.13)$$

Voici maintenant la preuve du lemme 3.1.1

Preuve du Lemme 3.1.1. À partir des équations (3.1.3), (3.1.5) et (3.1.6) du théorème 3.1.1 avec $l = 1$ dans l'approximation de $J_n(nz)$, nous avons que

$$J_n(nz) = \frac{1}{1 + \delta_3} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{4\zeta}{1 - z^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left(Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) \left(1 + \frac{A_1(\zeta)}{n^2} \right) + \frac{Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{n^{\frac{4}{3}}} B_0(\zeta) + \epsilon_3 \right)$$

avec

$$|\delta_3| \leq \frac{0.013227}{n^3} \exp\left(\frac{0.218423}{n}\right) \quad (3.1.14)$$

$$|\epsilon_3| \leq \frac{0.008352}{n^3} \exp\left(\frac{0.218423}{n}\right). \quad (3.1.15)$$

Nous reviendrons à la section 3.1.1 sur les évaluations numériques de δ_3 et ϵ_3 .

Maintenant, un changement de variable qui « défait » l'homothétie nz est donné par $x = nz$. En se concentrant seulement sur $z > 1$ c'est-à-dire sur $z \in (1, \infty)$, alors (voir [O16])

$$\zeta = -\left(\frac{3}{2} \int_1^z \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} dz\right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.1.16)$$

$$= -\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \quad x > n > 0 \quad (3.1.17)$$

où

$$\eta = \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos\left(\frac{n}{x}\right) \quad x > n > 0$$

Ainsi

$$Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) = Ai(-(n^{\frac{2}{3}}(-\zeta)))$$

$$Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta) = Ai'(-(n^{\frac{2}{3}}(-\zeta)))$$

$$\xi = \eta$$

En substituant $S = 2$ dans les approximations de Ai et Ai' données respectivement par (3.1.7) et (3.1.9), et en dénotant pour des raisons de commodité $\theta_1(\eta)$ et $\theta_2(\eta)$ par

$$\theta_1(\eta) = \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right)\frac{u_1}{\eta^1} + R_2 \quad (3.1.18)$$

$$\theta_2(\eta) = \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) - \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right)\frac{v_1}{\eta^1} + R'_2 \quad (3.1.19)$$

$$|R_2| \leq \exp\left(\frac{5}{36\eta}\right)\frac{45}{74}\frac{1}{\eta^2} \quad (3.1.20)$$

$$|R'_2| \leq \exp\left(\frac{7}{36\eta}\right)\frac{65}{74}\frac{1}{\eta^2} \quad (3.1.21)$$

alors

$$Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{(-\zeta)^{\frac{1}{4}}}\theta_1(\eta)$$

$$Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{\frac{1}{6}}(-\zeta)^{\frac{1}{4}}\theta_2(\eta)$$

Par conséquent, pour $z > 1$ ou bien $\zeta < 0$,

$$\begin{aligned} J_n(nz) = \frac{1}{1+\delta_3}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4}{z^2-1}\right)^{\frac{1}{4}} & \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}\theta_1(\eta)\left(1+\frac{A_1(\zeta)}{n^2}\right)\right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{4}{3}}}\theta_2(\eta)(-\zeta)^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta) + \epsilon_3\right) \end{aligned}$$

et donc pour $x > n > 0$ avec $\zeta < 0$,

$$\begin{aligned} J_n(x) = \frac{1}{1+\delta_3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x^2-n^2)^{-\frac{1}{4}} & \left(\theta_1(\eta) + \theta_1(\eta)\frac{A_1(\zeta)}{n^2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{n}\theta_2(\eta)(-\zeta)^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta) + \sqrt{\pi}\epsilon_3\right) \end{aligned}$$

Maintenant soit (voir [O16])

$$s_1 = \sup_{\zeta < 0} |A_1(\zeta)| = \frac{1}{225} \quad (3.1.22)$$

$$s_2 = |\zeta(z_1)|^{\frac{1}{2}}|B_0(z_1)| \quad (3.1.23)$$

$$\approx 0.010862854400 \quad (3.1.24)$$

et où z_1 est le seul point stationnaire de $|\zeta(z)|^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta(z))$ pour $z > 1 \Leftrightarrow \zeta < 0$ tel que

$$z_1 = 1.979495483061 \quad \text{avec} \quad \zeta(z_1) = -1.000459796360 .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|\theta_1(\eta)A_1(\zeta)| &\leq |\theta_1(\eta)|s_1 \\
&= \frac{s_1}{n^2} + \frac{u_1s_1}{n^2\eta} + \frac{|R_2|s_1}{n^2} \\
\frac{1}{n}|\theta_2(\eta)(-\zeta)^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta)| &\leq \frac{1}{n}|\theta_2(\eta)|s_2 \\
&\leq \frac{s_2}{n} + \frac{|v_1|s_2}{n\eta} + \frac{|R'_2|s_2}{n}
\end{aligned}$$

En dénotant par

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= (1 + \delta_3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}(x^2 - n^2)^{\frac{1}{4}}J_n(x) \\
&= \theta_1(\eta) + \theta_1(\eta)\frac{A_1(\zeta)}{n^2} + \frac{1}{n}\theta_2(\eta)(-\zeta)^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta) + \sqrt{\pi}\epsilon_3
\end{aligned}$$

alors pour $x > n > 0$, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)\right| &\leq \frac{u_1}{\eta} + \frac{s_2}{n} \\
&+ \left(|R_2| + \frac{s_1}{n^2} + \frac{u_1s_1}{n^2\eta} + \frac{|R_2|s_1}{n^2} + \frac{|v_1|s_2}{n\eta} + \frac{|R'_2|s_2}{n} + \sqrt{\pi}|\epsilon_3|\right)
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la première inégalité. Pour la deuxième partie du lemme, procédons comme ce qui suit.

Soit la fonction $f_n(x)$ donnée par l'équation (3.1.2), il est possible de regarder à $\eta(x, n)$ pour $x > n > 0$ de deux façons. La première façon est lorsque n est fixe et x varie, lequel cas la fonction $g_1(x) := \eta(x, n)$ est croissante en $x > n$. La deuxième façon, ce qui sera utile, est lorsque x est fixe et n varie, dans ce cas la fonction $g_2(n) := \eta(x, n)$ est décroissante pour tout $n \in (0, x)$. Ainsi pour une valeur fixe arbitraire $x > 0$, il existe $n_x < x$ telle que pour tout n avec $n \leq n_x$, la fonction $\eta^{-1}(x, n) < 1$. Par conséquent,

$$\frac{1}{\eta^2} \leq \frac{1}{\eta} \leq 1 \quad \text{pour } n \leq n_x$$

De même, pour toute constante k ,

$$\exp\left(\frac{k}{\eta}\right) \leq \exp(k) \quad \text{pour } n \leq n_x$$

De par la remarque 3.1.1 et les équations (3.1.11), (3.1.12), (3.1.22) et (3.1.23), alors $u_1 = \frac{5}{72}$, $v_1 = -\frac{7}{72}$, $s_1 = \frac{1}{225}$ et $s_2 \approx 0.010862854400$. Si, en plus, $n \leq n_x$, et, en posant les constantes

$$\begin{aligned} A &\approx s_2 + s_1 + u_1 s_1 + \exp\left(\frac{5}{36}\right) \frac{45}{74} s_1 + |v_1| s_2 + \exp\left(\frac{7}{36}\right) \frac{65}{74} s_2 \\ &\quad + 0.008352\sqrt{\pi} \exp(0.218423) \\ &\approx 0.049784723505 \\ B &= u_1 + \exp\left(\frac{5}{36}\right) \frac{45}{74} \\ &\approx 0.768158487672 \end{aligned}$$

alors

$$\left| f_n(x) - \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta}$$

et

$$f_n(x) = \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

■

3.1.1. Calculs numériques des variations totales

Pour plus de détails concernant ce qui suit, se référer principalement à [O16].

La valeur de $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta))$ est calculée en trouvant les points stationnaires de $|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)$ et en utilisant la formule de la variation totale. L'unique point stationnaire autre que $\zeta = 0$ se situe à $\zeta = \zeta(z_1) \approx -1.000459796360$ où $z_1 \approx 1.979495483061$. Par conséquent, en dénotant par

$$g(z) = |\zeta(z)|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta(z))$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)) &= \lim_{z \rightarrow 0} g(z) - 2g(z=1) + 2g(z=z_1) + \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\ &\approx \frac{1}{12} - 0 + 2(0.010862854400) + 0 \\ &\approx 0.105059042134 \end{aligned}$$

Également

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{24} + \frac{5}{24} - \frac{5}{48\zeta^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{24} + \frac{5}{24} - \frac{5}{48\zeta(z)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \left(-\frac{3}{24} + \frac{5}{24} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{12} \\
\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour trouver la valeur numérique de $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta))$, il faut les points stationnaires de $|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta)$.

En dénotant par

$$g(z) = |\zeta(z)|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta(z))$$

alors ses points stationnaires autres que $z = 1$ sont

$$z_1 \approx 0.138560281581$$

$$z_2 \approx 1.418538099456$$

Par conséquent, la variation totale est

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta)) &= \lim_{z \rightarrow 0} g(z) - 2g(z_1) + 2g(z = 1) - 2g(z = z_2) + \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
&\approx -0.002681327160 - 2(-0.004008186698) \\
&\quad + 2(0) - 2(-0.000639161111) + 0 \\
&\approx 0.006613368457
\end{aligned}$$

avec les valeurs des limites suivantes

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow 0} g(z) \\
&= -\frac{139}{51840} \\
\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maintenant, je donne les coefficients $A_s(\zeta)$ et $B_s(\zeta)$ qui n'ont pas été faciles à trouver pour $s = 1$.

Les coefficients $A_s(\zeta)$ et $B_s(\zeta)$ pour $s = 0, 1$ suivent et, dans ce qui suit, $t = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $t = -it_1$ avec $t_1 = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ et $\zeta_1 = -\zeta$.

$$\begin{aligned}
B_0(\zeta) &= -\frac{3t - 5t^3}{24\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{48\zeta^2} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1 \\
B_0(\zeta) &= \frac{3t_1 + 5t_1^3}{24\zeta_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{48\zeta_1^2} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1 \\
B_1(\zeta) &= \frac{-(30375t^3 - 369603t^5 + 765765t^7 - 425425t^9)}{414720\zeta^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad - \frac{(405t^2 - 2310t^4 + 1925t^6)}{55296\zeta^2} \\
&\quad - \frac{(1155t - 1925t^3)}{110592\zeta^{\frac{7}{2}}} - \frac{85085}{663552\zeta^5} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1 \\
B_1(\zeta) &= \frac{(30375t_1^3 + 369603t_1^5 + 765765t_1^7 + 425425t_1^9)}{414720\zeta_1^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \frac{(405t_1^2 + 2310t_1^4 + 1925t_1^6)}{55296\zeta_1^2} \\
&\quad + \frac{(1155t_1 + 1925t_1^3)}{110592\zeta_1^{\frac{7}{2}}} + \frac{85085}{663552\zeta_1^5} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1 \\
A_1(\zeta) &= \frac{81t^2 - 462t^4 + 385t^8}{1152} - \frac{7(3t - 5t^3)}{1152\zeta^{\frac{3}{2}}} - \frac{455}{4608\zeta^3} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1 \\
A_1(\zeta) &= -\frac{81t_1^2 + 462t_1^4 + 385t_1^8}{1152} - \frac{7(3t_1 + 5t_1^3)}{1152\zeta_1^{\frac{3}{2}}} + \frac{455}{4608\zeta_1^3} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1
\end{aligned}$$

Les valeurs de $A_s(0)$ et de $B_s(0)$ peuvent être calculées en utilisant les développements de Meissel de $J_n(n)$ que nous pouvons retrouver dans [Wa]. Ces valeurs se retrouvent également dans [O16] et, par conséquent,

$$\begin{aligned} A_1(0) &= -\frac{1}{225} \\ B_0(0) &= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{140} \\ B_1(0) &= -\frac{(1213.2)^{\frac{4}{3}}}{2047500} \end{aligned}$$

Remarque 3.1.4 (comparaisons des calculs). *Les coefficients mentionnés précédemment sont ceux qui ont été codés avec Maple pour pouvoir trouver les points stationnaires et, par suite, les variations totales. Pour la variation totale de $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta))$, il est possible de la retrouver avec moins de décimales dans de nombreux documents dont [O16]. Quant à $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta))$, elle peut être retrouvée à la page 315 dans [LaWo] où les auteurs ne donnent pas cependant la fonction $B_1(\zeta)$.*

Finalement, les routines en Maple pour évaluer les points stationnaires numériquement sont données en annexe.

3.2. L'ARTICLE DE KUZNETSOV ET FEDOSOV, EXPLICATIONS ET CORRECTIONS

Ayant maintenant une meilleure idée concernant l'expansion uniforme de $J_n(x)$, alors voici, avec un peu plus de détails que l'article original [KF], où il est montré que la loi de Weyl pour le disque D de rayon r est dans l'ordre $2/3$.

Sans perte de généralité, le rayon du disque est fixé à $r = 1$. Il est bien connu que les valeurs propres du problème de Dirichlet sur le disque de rayon 1 sont les zéros positifs des fonctions de Bessel $J_n(x)$ d'ordre $n = 0, 1, 2, \dots$. Les valeurs propres correspondant aux ordres $n = 1, 2, \dots$ ont une multiplicité double et celle correspondant à l'ordre $n = 0$ sont simples.

Voici une expansion uniforme de la fonction de Bessel de premier type obtenue précédemment qui sera utile pour la suite. Soit $x > n > 0$, $J_n(x)$ la fonction de

Bessel de premier type et soit

$$f_n(x) = (1 + \delta_3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (x^2 - n^2)^{\frac{1}{4}} J_n(x) \quad (3.2.1)$$

avec

$$\eta(x, n) = \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos\left(\frac{n}{x}\right)$$

et $\delta_3 > 0$, δ_3 ne dépend que de n , $|\delta_3| < 0.016456$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_3 = 0$. Alors pour une valeur fixe de x , il existe $n_x < x$ telle que l'inégalité suivante est vérifiée

$$f_n(x) = \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right) \quad (3.2.2)$$

comme il a été démontré précédemment.

Remarque 3.2.1. *Les nombres de zéros de la fonction f_n et J_n dans un intervalle donné sont les mêmes, car f_n n'est que J_n multiplié par une fonction strictement positive.*

Remarque 3.2.2. *L'approximation donnée de J_n donnée dans l'article est comme suit*

$$J_n(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (k^2 - n^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\eta(k, n) - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Ainsi, le problème consistant au dénombrement du nombre de zéros positifs des fonctions $J_n(x)$ n'excédant pas k est transformé en un problème de dénombrement de points entiers dans un domaine bien précis d'où l'utilisation prochaine du théorème de Van der Corput.

Soit $N_n(k)$ le nombre de zéros de la fonction $J_n(x)$ dans l'intervalle $n < x < k$. Alors,

$$N(k) = N_0(k) + \sum_{n=1}^{[k]} N_n(k)$$

où $[k]$ dénote la partie entière de k . En fixant les nombres $\nu_0 = [k^{\frac{1}{3}}] + \frac{1}{2}$ et $\nu_1 = [k - k^{\frac{4}{9}}] + \frac{1}{2}$, la somme $N(k) - N_0(k)$ est divisée en trois parties comme suit

$$\sum_{n=1}^{[k]} N_n(k) = \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} 1 + \sum_{n=\nu_0 + \frac{1}{2}}^{\nu_1 - \frac{1}{2}} 1 + \sum_{n=\nu_1 + \frac{1}{2}}^{[k]} 1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Une estimation de Σ_2 sera donnée en utilisant le théorème de Van der Corput. Quant à Σ_1 et Σ_3 , leurs estimations utiliseront la monotonie de $N_n(k)$. $N_0(k)$ sera estimé à la toute fin.

En utilisant (3.2.2) pour $n \in (\nu_0, \nu_1)$ qui est équivalent à affirmer qu'il existe A et B tels que

$$\left| f_n(k) - \cos\left(\eta(k, n) - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta(k, n)}$$

et il s'ensuit que le nombre de zéros de $J_n(x)$ pour $x \in (n, k)$ est le même que le nombre de zéros de la fonction $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ dans l'intervalle $0 < x \leq \eta(k, n) + \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta(k, n)}$. Par conséquent,

$$N_n(k) = \left\lceil \frac{1}{\pi} \eta(k, n) + \frac{1}{4} + \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta(k, n)} \right\rceil$$

Remarque 3.2.3 (Justification du nombre de zéros). *Une justification de la formule pour $N_n(k)$ a été donnée rigoureusement par Dominique Rabet. Ses résultats paraîtront ultérieurement dans ses publications.*

Dans cette partie, une estimation de Σ_2 est donnée en détails. Il faut utiliser le théorème de Van der Corput mentionné dans [KF] que voici

Théorème 3.2.1 (Van der Corput). *Soit les nombres $\nu_0 - \frac{1}{2}$, $\nu_1 - \frac{1}{2}$ et $x_0 - \frac{1}{2}$ entiers tel que $\nu_0 < \nu_1$. Soit la fonction à valeurs réelles $f(\nu)$ telle que $f \in C^2(\nu_0, \nu_1)$ et telle que*

$$0 < \sigma \leq f'(\nu) \leq \tau, \quad f''(\nu) > \frac{1}{\mu}, \quad \mu > 1, \mu > \sigma^{-3}.$$

Soit N le nombre de points entiers à l'intérieur du domaine $\nu_0 < \nu < \nu_1$ et $x_0 \leq x \leq f(\nu)$. Soit A l'aire du domaine. Alors

$$N = A + O(\mu^{\frac{2}{3}} \tau)$$

Par ce qu'il a été accompli auparavant, Σ_2 est donné par le nombre de points entiers dans le domaine que voici

$$\nu_0 < \nu < \nu_1, \quad \frac{1}{2} < x < f(\nu) = \frac{1}{\pi} \eta(k, \nu) + \frac{1}{4} + \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\eta(k, \nu)}.$$

Soit $\delta = \max \left| \frac{A}{\nu} \right|$ et a telle que $\left| \frac{B}{\eta(k, \nu)} \right| < \frac{a}{\pi \eta}$ pour $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$. Soit

$$\begin{aligned} f_1(\nu) &= \frac{1}{\pi} \eta + \frac{1}{4} - \frac{a}{\pi \eta} - \delta \\ f_2(\nu) &= \frac{1}{\pi} \eta + \frac{1}{4} + \frac{a}{\pi \eta} + \delta \end{aligned}$$

alors $f_1(\nu) \leq f(\nu) \leq f_2(\nu)$. Par conséquent, en dénotant N_1 et N_2 les nombres de points entiers donnés en remplaçant f respectivement par f_1 et f_2 , alors $N_1 \leq \Sigma_2 \leq N_2$.

Le théorème de Van der Corput sera utilisé sur f_1 et f_2 . Il faut montrer en détails que f_1 et f_2 satisfont aux hypothèses du théorème. Il est suffisant de le faire pour f_1 , le cas de f_2 étant identique.

Pour montrer que f_1 satisfait aux hypothèses du théorème, il faut d'abord évaluer les dérivées suivantes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{k^2 - \nu^2} - \nu \arccos \left(\frac{\nu}{k} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} (-2\nu) - \arccos \left(\frac{\nu}{k} \right) + \nu \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k^2}}} \frac{1}{k} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} - \arccos \left(\frac{\nu}{k} \right) + \frac{\nu}{k} \frac{k}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \\
&= -\arccos \left(\frac{\nu}{k} \right) \\
\frac{\partial \eta^2}{\partial \nu^2} &= \frac{k}{\sqrt{k^2 - \nu^2}}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \nu} &= \frac{1}{\pi} \eta_\nu(k, \nu) + \frac{a}{\pi} \frac{\eta_\nu(k, \nu)}{\eta^2(k, \nu)} \\
&= \frac{1}{\pi} \eta_\nu(k, \nu) \left(1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right) \\
&= -\frac{\arccos \left(\frac{\nu}{k} \right)}{\pi} \left(1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{-k}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \right) \left(1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right) - \frac{\arccos \left(\frac{\nu}{k} \right)}{k} \left(0 - \frac{2a\eta_\nu(k, \nu)}{\eta^3(k, \nu)} \right) \\
&= \frac{k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \left(1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right) - \frac{\left(\arccos \left(\frac{\nu}{k} \right) \right)^2 2a}{\pi \eta^3(k, \nu)}
\end{aligned}$$

Comme $\eta(k, \nu) \searrow$ lorsque $\nu \nearrow$ avec k fixe et que $\eta > 0$, alors $\min \eta(k, \nu) = \eta(k, \nu_1) = \eta(k, k - k^{\frac{4}{9}})$ pour $\nu \leq \nu_1$. L'inégalité $\arccos(1 - \alpha) \geq \sqrt{\alpha}$ pour $\alpha \in (0, 1)$ permet donc de déduire l'inégalité utile suivante non démontrée dans l'article

[KF].

$$\begin{aligned}
\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}}) &= \sqrt{k^2 - (k^2 - 2kk^{\frac{4}{9}} + k^{\frac{8}{9}})} - (k - k^{\frac{4}{9}}) \arccos\left(\frac{k - k^{\frac{4}{9}}}{k}\right) \\
&\geq \sqrt{2k^{\frac{13}{9}} - k^{\frac{8}{9}}} - (k - k^{\frac{4}{9}})\sqrt{k^{-\frac{5}{9}}} \\
&= \sqrt{2k^{\frac{26}{18}} - k^{\frac{10}{18}} - k^{\frac{3}{18}}(k^{\frac{10}{18}} - 1)} \\
&= \sqrt{2k^{\frac{6}{18}}\left(k^{\frac{20}{18}} - \frac{1}{2}k^{\frac{10}{18}}\right)} - \sqrt{2}k^{\frac{3}{18}}(k^{\frac{10}{18}} - 1)\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2k^{\frac{3}{18}}\left(\sqrt{k^{\frac{20}{18}} - \frac{1}{2}k^{\frac{10}{18}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(k^{\frac{10}{18}} - 1)\right)} \\
&\geq \sqrt{2}k^{\frac{1}{6}} \\
&\geq k^{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\eta(k, k - k^{\frac{3}{5}}) \geq \sqrt{2}k^{\frac{2}{5}} \geq k^{\frac{2}{5}}$$

Également, l'approximation suivante pour $\tilde{\eta}(z) = \sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z)$ est utile

$$1 \leq \frac{(1 - z)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z)} < \frac{3}{4}\sqrt{2} \quad z \in (0, 1)$$

Par exemple, avec $0 < z = \frac{\nu}{k} < 1$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{\eta(k, \nu)} = \frac{1}{k(\sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z))} \leq \frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k}(1 - z)^{-\frac{3}{2}}$$

Puisque $\arccos\left(\frac{\nu_1}{k}\right) \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$, alors

$$k^{-\frac{5}{18}} = \sqrt{k^{-\frac{5}{9}}} \leq \arccos(1 - k^{-\frac{5}{9}}) = \arccos\left(\frac{\nu_1}{k}\right) \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right).$$

Par conséquent,

$$0 < \frac{k^{-\frac{5}{18}}}{\pi} \leq \frac{k^{-\frac{5}{18}}}{\pi} \left(1 + \frac{a}{\eta^2}\right) \leq -\frac{\partial f_1}{\partial \nu}$$

De même, comme $0 \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right) \leq \frac{\pi}{2}$, alors

$$-\frac{\partial f_1}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\eta^2}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{\eta^2(k, k - k^{\frac{4}{9}})} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{(k^{\frac{1}{6}})^2} = \frac{1}{2} + ak^{-\frac{1}{3}}$$

Il s'ensuit donc qu'avec $C = \frac{1}{\pi}$

$$0 < Ck^{-\frac{5}{18}} < -\frac{\partial f_1}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} + O(k^{-\frac{1}{3}})$$

tel qu'écrit dans l'article [KF].

Pour estimer $\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2}$, il faut d'abord montrer que

$$\frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)\right)^2}{\pi\eta^3(k, \nu)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}}\right)$$

uniformément pour $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Pour ce faire, les auteurs séparent l'intervalle $(\nu_0, \nu_1) = (\nu_0, \nu') \cup (\nu', \nu_1)$ où $\nu' = k - k^{\frac{3}{5}}$. Dans l'intervalle (ν_0, ν') , comme $\eta(k, \nu)$ est toujours décroissante, alors

$$\begin{aligned} \frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)\right)^2}{\eta^3} &\leq \frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu_0}{k}\right)\right)^2}{\eta^3} \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\eta^3(k, \nu')} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{k^{\frac{2}{5}}}\right)^3 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{k^{\frac{6}{5}}} \dots \\ &\dots \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{k} \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \end{aligned}$$

et, dans l'intervalle (ν', ν_1) ,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)\right)^2}{\eta^3} &\leq \frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu'}{k}\right)\right)^2}{\eta^3(k, \nu_1)} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{k\tilde{\eta}\left(\frac{\nu}{k}\right)}\right)^3 \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k}\left(1 - \frac{\nu}{k}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)^3 \dots \\ &\dots \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k}\left(1 - \frac{\nu'}{k}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)^3 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k}\left(k^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)^3 = (\text{const.})k^{-\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{k^2 - \nu^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}}\right) > \frac{D}{k}$$

Remarque 3.2.4 (Satisfaction des hypothèses du théorème de Van der Corput).

Comme

$$0 < Ck^{-\frac{5}{18}} < -\frac{\partial f_1}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} + O(k^{-\frac{1}{3}})$$

et que

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} > \frac{D}{k}$$

alors f_1 satisfait aux hypothèses du théorème de Van der Corput avec

$$\begin{aligned} \sigma &= Ck^{-\frac{5}{18}} \\ \tau &= \frac{1}{2} + O(k^{-\frac{1}{3}}) \\ \mu &= \frac{k}{D}. \end{aligned}$$

En dénotant ainsi par N_1 et A_1 respectivement le nombre de points entiers et l'aire du domaine délimité par $\nu_0 < \nu < \nu_1$ et $x_0 \leq x \leq f_1(\nu)$ et en appliquant le théorème de Van der Corput,

$$N_1 = A_1 + O(\mu^{\frac{2}{3}}\tau) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(f_1(\nu) - \frac{1}{2}\right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}).$$

Comme $\delta = \max\left(\frac{A}{\nu}\right)$, alors

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1} \delta d\nu \leq (\nu_1 - \nu_0) \frac{A}{\nu_0} \leq \frac{\nu_1}{\nu_0} = O(k^{\frac{2}{3}}).$$

Aussi, puisque $\eta_\nu = -\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$, que $k^{-\frac{5}{18}} \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$ pour $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{1}{\eta} d\nu &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{1}{\eta} \frac{\eta_\nu}{\eta_\nu} d\nu = \int_{\eta(k, \nu_0)}^{\eta(k, \nu_1)} \frac{d\eta}{\eta \eta_\nu} = \int_{\eta(k, \nu_0)}^{\eta(k, \nu_1)} \frac{d\eta}{-\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)\eta} = \dots \\ &\dots = \int_{\eta(k, \nu_1)}^{\eta(k, \nu_0)} \frac{d\eta}{\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)\eta} \leq \frac{1}{k^{-\frac{5}{18}}} \log\left(\frac{\eta(k, \nu_0)}{\eta(k, \nu_1)}\right) = O(k^{\frac{5}{18}} \log k). \end{aligned}$$

Remarque 3.2.5 (correction). *Dans l'article, une erreur typographique s'est produite. En effet, il est écrit que $N_1 = O(k^{-\frac{5}{18}} \log k)$.*

Ainsi,

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(f_1(\nu) - \frac{1}{2}\right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(\frac{\eta}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{a}{\pi\eta} - \delta - \frac{1}{2}\right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(\frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4}\right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) + O(k^{\frac{5}{18}} \log k) + O(k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(\frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4}\right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \end{aligned}$$

Il est de même pour N_2 en montrant de la même façon que f_2 satisfait aux hypothèses du théorème de Van der Corput. Par conséquent, $N_1 \leq \Sigma_2 \leq N_2$ et

$$\Sigma_2 = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(\frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4}\right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}})$$

Maintenant pour estimer Σ_1 et Σ_2 , il faut utiliser la monotonie de $N_n(k)$. De façon générale,

$$N_n(k) \leq N_{n-1}(k) \quad \text{pour tout } n, k$$

Pour Σ_3 , comme

$$\Sigma_3 = \sum_{n=\nu_1+\frac{1}{2}}^{[k]} N_n(k) = \sum_{[k-k^{\frac{4}{9}}]+1}^{[k]} N_n(k) \leq \sum_{[k-k^{\frac{4}{9}}]+1}^{[k]} N_{\nu_1-\frac{1}{2}}(k) \leq k^{\frac{4}{9}} N_{\nu_1-\frac{1}{2}}(k)$$

que

$$N_{\nu_1-\frac{1}{2}}(k) = \left[\frac{\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}})}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta} \right] = O(\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}})) = O(k^{\frac{1}{6}})$$

que $\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}}) = k\tilde{\eta}(1 - k^{-\frac{5}{9}})$ et que

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(1 - k^{-\frac{5}{9}}) &< \left(1 - (1 - k^{-\frac{5}{9}})\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= k^{-\frac{5}{6}} \\ &\Downarrow \\ \eta(k, k - k^{\frac{4}{9}}) &= k\tilde{\eta}(1 - k^{-\frac{5}{9}}) \\ &< k^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

alors

$$\Sigma_3 = O(k^{\frac{4}{9}} k^{\frac{1}{6}}) = O(k^{\frac{11}{18}})$$

Pour Σ_1 , il faut télescoper la somme d'abord comme suit

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{n=1}^{\nu_0-\frac{1}{2}} N_n(k) \\ &= \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k) + \left(N_1(k) - N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k)\right) \\ &\quad + \left(N_2(k) - N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k)\right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \left(N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k) - N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k)\right) \\ &= \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k) + \sum_{n=1}^{\nu_0-\frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k)\right). \end{aligned}$$

Maintenant il faut estimer $N_0(k)$ et $N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k)$. Dans le cas de $N_0(k)$, comme $J_0(k) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$, alors $N_0(k) = \frac{k}{\pi} + O(1)$ et $N_{\nu_0-\frac{1}{2}}(k) = \frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{1}{3}})$. Par

la monotonicité de $N_n(k)$,

$$\begin{aligned}
N_n(k) &< N_0(k) \\
&\Downarrow \\
N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) &< N_0(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) \\
&= \frac{k}{\pi} + O(1) - \frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{1}{3}}) \\
&= O(k^{\frac{1}{3}})
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)\right) \\
&= \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{1}{3}})\right) + \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) O(k^{\frac{1}{3}}) \\
&= \frac{k}{\pi} \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) + O(k^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.6 (correction). *Des erreurs typographiques pour l'expression de Σ_1 se sont produites dans l'article. En effet, il est écrit que*

$$\sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} N_n(k) = N_{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)\right)$$

qui devrait s'écrire

$$\sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} N_n(k) = \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
N(k) &= N_0(k) + 2(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) \\
&= \frac{k}{\pi} + O(1) + 2\left(\left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right)\frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{2}{3}}) + \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left(\frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4}\right)d\nu + \Sigma_3\right) \\
&= \frac{k}{\pi} + 2\nu_0\frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} + 2\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{\eta}{\pi}d\nu - \frac{2}{4}(\nu_1 - \nu_0) + 2\Sigma_3 + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2\nu_0 k}{\pi} + 2\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{\eta}{\pi}d\nu - \frac{1}{2}(k - k^{\frac{4}{9}} - k^{\frac{1}{3}}) + 2\Sigma_3 + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi}\nu_0 k + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \eta(k, \nu)d\nu - \frac{k}{2} + 2\Sigma_3 + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi}(k\nu_0 + \nu_0 O(k^{\frac{1}{3}})) + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \eta(k, \nu)d\nu - \frac{k}{2} + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_1}^k \eta(k, \nu)d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\nu_0} \eta(k, \nu)d\nu + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \eta(k, \nu)d\nu - \frac{k}{2} + \frac{2}{\pi}\int_{\nu_1}^k \eta(k, \nu)d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^k \eta(k, \nu)d\nu - \frac{k}{2} + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi k^2}{8}\right) - \frac{k}{2} + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + O(k^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}$$

Ce qui termine l'explication de [KF].

Nous rappelons les lecteurs que spécialement pour la section 3.2 qui s'achève ici, nous avons utilisé k au lieu de λ et étudier le problème $\Delta u + k^2 u = 0$ plutôt que $\Delta u + k u = 0$ et cela dans le but de faciliter les références à l'article [KF]. Pour la section 3.3 qui suit, nous revenons à notre lettre habituelle λ et au problème des valeurs propres exprimé sous la forme $\Delta u + \lambda u = 0$.

3.3. ALGORITHME POUR CALCULER LA FONCTION DE COMPTE

$$N(\lambda)$$

Cette section est très courte et comporte une idée que j'ai eue permettant de calculer la fonction de compte

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$$

efficacement **sans avoir à calculer toutes les valeurs propres λ_j telles que $\lambda_j \leq \lambda$.**

Remarque 3.3.1 (Façon naïve de calculer $N(\lambda)$). *Étant donné l'algorithme de la section 2.2 qui détermine la suite $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$ pour un entier l donné. La façon la plus simple de calculer $N(\lambda)$ est de calculer $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$ pour un l suffisamment grand et par la suite de compter combien de valeurs propres λ_j sont inférieures à λ .*

« Buts » des algorithmes

Étant donné un entier strictement positif l , l'algorithme de la section 2.2 donne $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$. Étant donné un nombre réel strictement positif λ , l'algorithme de la présente section donne l'entier positif $N(\lambda)$. Toutefois de par les remarques précédentes, nous pouvons voir qu'il est possible d'utiliser l'algorithme de la section 2.2 pour évaluer $N(\lambda)$ et cela a un sens en se rappelant les rappels théoriques de la section 1.1 concernant $N(\lambda)$.

Remarque 3.3.2. *Les deux algorithmes, celui de la présente section et celui de la section 2.2, déterminent un ensemble fini de solutions SOL de paires (n, k) avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et $k = 1, 2, \dots$ où n et k sont les paramètres pour les zéros. Les paramètres sont l'ordre (n) de la fonction de Bessel et le rang (k) du zéro. Dans le cas de l'algorithme de la section 2.2, un ensemble fini PA contenant SOL est déterminé à l'aide du théorème de Courant et SOL est obtenu en ordonnant les zéros correspondant aux paires dans PA. Dans le cas de l'algorithme de la présente section, seul la frontière de SOL est évaluée et il n'est pas nécessaire de trouver tous les zéros qui sont plus petits que $\sqrt{\lambda}$ pour évaluer $N(\lambda)$.*

L'idée utilise la monotonie des zéros des fonctions de Bessel $J_\nu(x)$ pour $x \geq 0$ et $\nu \geq 0$. Si $j_k(\nu)$ dénote le k^{e} zéro de la fonction de Bessel de $J_\nu(x)$, alors (voir [\[Wa\]](#)),

$$\begin{aligned} j_k(\nu) &< j_{k+1}(\nu) \\ j_k(\nu) &< j_k(\nu + \nu') \text{ pour } \nu' > 0. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de Δ sur le disque D de rayon 1 correspondent aux carrés des zéros $j_k(n)$ avec $k = 1, 2, \dots$ et $n = 0, 1, \dots$. En fixant une valeur de λ et en

dénotant par $k_{n,\lambda}$, la valeur entière telle que

$$j_{k_{n,\lambda}}(n) \leq \sqrt{\lambda} \text{ et } j_{k_{n,\lambda}+1}(n) > \sqrt{\lambda}.$$

alors, par la monotonie des zéros,

$$j_{k_{n,\lambda}}(n) < j_{k_{n+1,\lambda}}(n+1).$$

Il s'agit donc pour chaque ordre n et λ choisi a priori d'évaluer $k_{n,\lambda}$ et ainsi en tenant compte de la multiplicité

$$N(\lambda) = k_{0,\lambda} + 2 \sum_{n=1}^N k_{n,\lambda}$$

où

$$N = \max \{n \ ; \ \text{tel que } k_{n,\lambda} = 1\}.$$

Remarque 3.3.3. *L'ensemble des paires (n, k) solution du problème dénoté auparavant par SOL est ainsi donc donné par*

$$\text{SOL} = \{(n, k) \ , \ k = 1, \dots, k_{n,\lambda}, \ n = 0, 1, \dots, N\}$$

et

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= 2 \cdot \text{card}(\text{SOL} \setminus \{(n, k) \ , \ n = 1, 2, \dots, N, \ k = 1, 2, \dots, k_{n,\lambda}\}) \\ &\quad + \text{card}(\{(0, k) \ , \ k = 1, 2, \dots, k_{0,\lambda}\}) \\ &= k_{0,\lambda} + 2 \sum_{n=1}^N k_{n,\lambda} \end{aligned}$$

Dans le présent algorithme qui calcule $N(\lambda)$, il n'est donc pas nécessaire d'évaluer tous les zéros associés aux paires dans SOL, mais seulement les valeurs $k_{n,\lambda}$ qui déterminent la frontière de SOL. Ce n'est pas le cas pour l'algorithme de la section 2.2 où il faut tous les évaluer afin de créer $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$ et cela s'explique parce que les buts poursuivis par les deux algorithmes sont différents quoique mathématiquement équivalents par les rappels théoriques de la section 1.1.

L'algorithme en mots

Les valeurs N et $k_{0,\lambda}$ peuvent être trouvées par une méthode quelconque. Soit

$n = 0, 1, \dots$, alors $k_{n,\lambda} - k_{n+1,\lambda} \in \{0, 1\}$. Donc pour trouver $k_{n+1,\lambda}$ en possédant $k_{n,\lambda}$, il suffit de tester la validité de l'inégalité suivante

$$j_{k_{n,\lambda}}(n+1) \leq \sqrt{\lambda}.$$

Si l'inégalité est vraie, alors $k_{n+1,\lambda} = k_{n,\lambda}$ sinon $k_{n+1,\lambda} = k_{n,\lambda} - 1$, etc. L'algorithme est initialisé avec $k_{0,\lambda}$ et l'algorithme procède en reculant et montant jusqu'à N . L'algorithme en Maple est annexé à la fin de ce mémoire.

Remarque 3.3.4 (Précision requise dans l'algorithme). *Si nous voulons calculer $N(\lambda)$, alors nous voulons trouver tous les zéros $j_k(n) \leq \sqrt{\lambda}$. Donc par la remarque A.5.1 avec $\lambda = 9.00 \cdot 10^{08}$ qui est la valeur maximale de λ apparaissant dans le tableau 3.1, il faut demander $\lceil \log(9.00 \cdot 10^{08}) \rceil + 1 = 10$ décimales de précision. Également, le lecteur peut se référer à l'annexe A.5 pour plus d'information.*

3.3.1. Quelques résultats pour les valeurs de la fonction de compte $N(\lambda)$

Voici quelques résultats pour les valeurs de la fonction de compte. Il est intéressant de constater que pour les valeurs de $\lambda = 1 \cdot 10^2, \dots, 4 \cdot 10^6$ dans le tableau qui suit, les valeurs de $N(\lambda)$ coïncident avec les valeurs retrouvées dans la liste des valeurs propres calculées par le premier algorithme. Par exemple à l'aide de la liste donnée à l'hyperlien précédent, la valeur propre λ_{998978} est la dernière valeur propre plus petite que $4.00 \cdot 10^6$ et le rang correspond également à la valeur apparaissant dans le tableau qui suit.

Voici donc quelques valeurs de la fonction de compte.

λ	$N(\lambda)$	λ	$N(\lambda)$	λ	$N(\lambda)$
1.00E+02	21	4.00E+04	9905	7.00E+06	1748690
2.00E+02	42	5.00E+04	12387	8.00E+06	1998600
3.00E+02	67	6.00E+04	14876	9.00E+06	2248481
4.00E+02	92	7.00E+04	17360	1.00E+07	2498404
5.00E+02	115	8.00E+04	19852	2.00E+07	4997783
6.00E+02	142	9.00E+04	22345	3.00E+07	7497255
7.00E+02	160	1.00E+05	24842	4.00E+07	9996841
8.00E+02	187	2.00E+05	49782	5.00E+07	12496477
9.00E+02	209	3.00E+05	74722	6.00E+07	14996075
1.00E+03	232	4.00E+05	99679	7.00E+07	17495807
2.00E+03	478	5.00E+05	124633	8.00E+07	19995483
3.00E+03	725	6.00E+05	149606	9.00E+07	22495362
4.00E+03	972	7.00E+05	174588	1.00E+08	24994959
5.00E+03	1214	8.00E+05	199546	2.00E+08	49992941
6.00E+03	1458	9.00E+05	224520	3.00E+08	74991365
7.00E+03	1706	1.00E+06	249494	4.00E+08	99989990
8.00E+03	1952	2.00E+06	499298	5.00E+08	124988741
9.00E+03	2206	3.00E+06	749151	6.00E+08	149987791
1.00E+04	2456	4.00E+06	998978	7.00E+08	174986827
2.00E+04	4925	5.00E+06	1248914	8.00E+08	199985791
3.00E+04	7415	6.00E+06	1498757	9.00E+08	224984997

TABLE 3.1. Valeurs de $N(\lambda)$ pour $d \cdot 10^p$ avec $d = 1, \dots, 9$ et $p = 2, \dots, 8$.

3.3.2. Temps de calcul pour les procédures naïve et efficace d'évaluer la fonction de compte $N(\lambda)$

Il est intéressant de constater que si notre seul but est d'évaluer $N(\lambda)$, alors il est nettement mieux d'utiliser l'algorithme de la présente section et de ne pas procéder en utilisant l'algorithme de la section 2.2. Voici à cet effet quelques comparaisons des temps de calculs.

λ	$N(\lambda)$	Temps requis (secondes)
100	21	0.024
1000	232	0.118
10000	2456	0.513
100000	24842	1.839
1000000	249494	7.704

TABLE 3.2. Temps requis pour évaluer $N(\lambda)$ rapidement avec l'algorithme de la section 3.3

l (rang)	λ_l	λ_{l+1}	Temps requis (secondes)
21	98.726272	103.499453	0.056
232	989.729086	1001.729979	0.928
2456	9998.868757	10038.582253	15.542
24842	99997.791736	100024.359657	392.066
249494	999994.341030	1000020.429162	16016.677

TABLE 3.3. Temps requis pour évaluer $N(\lambda)$ naïvement avec l'algorithme de la section 2.2

Les valeurs de la table 3.2 peuvent être utilisées pour vérifier celles de la table 3.3 et vice-versa. En d'autres termes, nous pouvons utiliser l'algorithme de la section 2.2 pour vérifier celui de la présente section et vice-versa.

CONCLUSION

Finalement, voici une liste résumant les points importants de ce mémoire. Les points 1,2 et 4 sont des résultats et/ou idées propres à l'auteur de ce mémoire.

- (1) La première ligne nodale de la deuxième fonction propre $u_2(r, \theta)$ sur un secteur $S(\alpha)$ du disque de rayon 1 et d'angle $\alpha \in (0, 2\pi)$ est donnée par l'équation

$$\begin{aligned} r &= \frac{j_1^2(\nu)}{j_2^2(\nu)} \text{ si } \alpha < \alpha_0 \\ \theta &= \frac{\alpha}{2} \text{ si } \alpha > \alpha_0 \end{aligned}$$

où $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$ et où $j_k(\nu)$ est le k^{e} zéro de la fonction de Bessel d'ordre ν . L'angle α_0 est l'angle critique où la ligne nodale n'est pas définie et il est donné implicitement en résolvant l'équation $j_2(\nu) - j_1(2\nu) = 0$ où $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$. La multiplicité de la 2^e valeur propre vaut 2 lorsque l'angle $\alpha = \alpha_0$.

- (2) Soit $m \in \mathbb{N}$. Ordonner les valeurs m premières valeurs propres de Δ sur le disque de rayon 1 ou sur un secteur est équivalent à trouver la configuration des ensembles nodaux des m premières fonctions propres qui y sont associées. En utilisant le théorème de Courant, j'ai créé un algorithme permettant de créer la liste des m premières valeurs propres. Une analyse de son temps d'exécution en fonction de m pourrait être fait en connaissant une borne sur le temps requis pour évaluer les zéros des fonctions de Bessel.

- (3) Soit la fonction de compte $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} 1$ des valeurs propres du problème $\Delta u + \lambda u = 0$ avec des conditions de Dirichlet sur ∂D . Une explication de l'article de [KF] a permis de comprendre pourquoi asymptotiquement

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{4} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + O(\lambda^{\frac{1}{3}}).$$

- (4) En utilisant la monotonie des zéros des fonctions de Bessel ainsi qu'un principe de « marche » sur un ensemble de pairs d'entiers bien déterminé par le problème en soit, j'ai créé un algorithme permettant d'évaluer exactement et efficacement $N(\lambda)$. Si notre seul but est d'évaluer $N(\lambda)$, le 2^e algorithme est beaucoup plus efficace que si nous procédions naïvement en utilisant le 1^{er} algorithme pour trouver le grand index l tel que $N(\lambda) \leq l$ et $N(\lambda) > l$.

Fin

BIBLIOGRAPHIE

- [Av] V. AVAKUMOVIĆ, *Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Math. Z., **65**, 1956
- [Be] M. BERGER, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 2003
- [FaLoOl] B.R. FABIJONAS, D.W. LOZIER, AND F.W.J. OLVER, *Computation of Complex Airy Function and Their Zeros Using Asymptotics and the Differential Equation*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 30, No. 4, Pages 471-490, 2004
- [HiCo] D. HILBERT AND R. COURANT, *Methods of mathematical physics*, Vol. 1, Interscience Publishers Inc., 1953
- [Ho] L. HÖRMANDER, *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math., **121**, Pages 193-218, 1968
- [Iv] V.YA. IVRIĬ *The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary*, Functional Anal. Appl., **14**, no. 2, Pages 98-106, 1980
- [KF] N.V. KUZNETSOW AND B.V. FEDOSOV, *An asymptotic formula for the eigenvalues of a circular membrane*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 1, No. 12, Pages 1682-1685, 1965
- [LaWo] T. LANG AND R. WONG, *"Best possible" upper bounds for the first two positive zeros of the Bessel function $J_\nu(x)$: The infinite case*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 71, Pages 311-329, 1996
- [Le1] B.M. LEVITAN, *On the asymptotic behavior of the spectral function of a self-adjoint differential equation of the second order*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **16**, Pages 325-352, 1952

- [Le2] B.M. LEVITAN, *On the asymptotic behavior of the spectral function of a self-adjoint differential equation of the second order and on expansion in eigenfunctions*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **17**, Pages 331-364, 1953
- [Le3] B.M. LEVITAN, *On the asymptotic behavior of the spectral function and on expansion in eigenfunctions of a self-adjoint differential equation of the second order II*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **19**, Pages 33-58, 1955
- [Li] M.M. LIPSCHUTZ, *Differential geometry*, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill, 1969
- [Mela] A.D. MELAS, *On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in \mathbb{R}^2* , Journal of Differential Geometry, **35**, Pages 255-263, 1992
- [Melr] R.B. MELROSE, *Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary*, Geometry of the Laplace operator, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., Pages 257-274, 1980
- [Ol1] F.W.J. OLVER, *A further method for the evaluation of zeros of Bessel functions, and some new asymptotic expansions for zeros of functions of large order*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 47, Pages 699-712, 1951
- [Ol2] F.W.J. OLVER, *Some new asymptotic expansions for Bessel functions of large orders*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 48, Pages 414-427, 1952
- [Ol3] F.W.J. OLVER, *The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter*, Phil. Trans. Roy. Soc., A247, no. 930, Pages 307-327, 1954
- [Ol4] F.W.J. OLVER, *The asymptotic expansion of Bessel functions of large order*, Phil. Trans. Roy. Soc., A247, no. 930, Pages 328-368, 1954
- [Ol5] F.W.J. OLVER, *Bessel functions III, Zeros and associated values*, Royal Society athenatical Tables, Vol. 7, The Royal Society, Cambridge, 1960
- [Ol6] F.W.J. OLVER, *Tables of Bessel functions of moderate or large orders* Mathematical Tables of National Physical Laboratory, Vol. 6, Her Majesty's Stationnery Office, London, 1962
- [Ol7] F.W.J. OLVER, *Error bounds for asymptotic expansions in turning-point problems*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 12, No. 1, Pages 200-214, 1964

- [Ol8] F.W.J. OLVER, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York, 1974
- [Po] G. PÓLYA, *On the eigenvalues of vibrating membranes*, Proc. London Math. Soc. (3) 11, Pages 419-433, 1961
- [QuWo] C. K. QU ET R. WONG, “Best possible” upper and lower bounds for the zeros of the Bessel function $J_\nu(x)$, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 351, No. 7, Pages 2833-2859, 1999
- [RaRa] J.-É. RAKOTOSON ET J.-M. RAKOTOSON, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presses Universitaires de France, Paris, 1999
- [Ro] M.D. ROGERS, *Partial fractions expansions and identities for products of Bessel functions*, Journal of Mathematical Physics, **46**, 043509, 2005
- [Sa] S. SAKS, *Theory of the integral*, English translation of the second revised edition by L.C. Young. Two additional notes from Prof S. Banach. Bibliography. Index. Notations. xv+343pp. Dover Publications Inc., New York, 1964
- [Sh] M. SHUBIN, *Partial differential equations*, à paraître
- [Wa] G.N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1944
- [Wi] M. WILLEM, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003

Annexe A

LISTE DES PROGRAMMES EN MAPLE ET EN MATLAB

Les programmes donnés ci-dessous ont été ajusté pour le format de ce mémoire.
Ne faites pas « copier et coller » sans réajuster les lignes des programmes.

A.1. PROGRAMME POUR OBTENIR LA SUITE DES m PREMIÈRES VALEURS/FONCTIONS PROPRES POUR $m \in \mathbb{N}$

```
# La variable "nbEV" est le nombre de valeurs propres
# désirées.
#
# Le temps requis à la fin de l'exécution est écrit
# dans le fichier "ProgState.txt".
#
# Thm. de Courant : nb. de comp. conn. <= 0.7*l où
# l est le rang.
#
# Lancer en arrière-plan: "maple -i Prog2BesFctEV.txt &"
###
# The variable "nbEV" indicates the number of wanted
# eigenvalues.
#
```

```

# Time required at the of the execution of the program
# is given in the file "ProgState.txt".
#
# Courant Nodal Thm: nb. of connected components  $\leq 0.7 \cdot l$ 
# where  $l$  is the rank.
#
# Send it in background mode : "maple -i Prog2BesFctEV.txt &"
#

Time0:=time();
nbEV:=1000000;

# nombre de décimal pour les calculs
# number of decimal for calculations
# with this accuracy is  $1e-6$  for all the zeros.
Digits:=ceil(log(nbEV)/log(10))+1+6;

# calcul des grandeurs de tableaux
# evaluate size of tables
sizeTAB:=ceil(0.7*nbEV);
for nn from 1 to ceil(0.5*0.7*nbEV)
  do sizeTAB:=sizeTAB+ceil(0.5*0.7*nbEV/nn)
end;

TABZero:=Array(1..sizeTAB);
TABInd:=Array(1..sizeTAB);

#cas nn = "ordre" = 0

foo:=1;

```

```

# la multiplicité est 1.
# multiplicity is 1
for kk from 1 to ceil(0.7*nbEV) do
    TABZero[foo]:=evalf(BesselJZeros(0,kk)^2);
    TABInd[foo]:=0;
    foo:=foo+1;
end do;

#STATE
fidWst:=fopen("ProgState.txt",WRITE);
fprintf(fidWst,"\nn = 0 done");
fclose(fidWst);

#cas nn = "ordre" > 0
# la multiplicité vaut 2.
# multiplicity is 2.
for nn from 1 to ceil(0.5*0.7*nbEV) do

    for kk from 1 to ceil(0.5*0.7*nbEV/nn) do
        TABZero[foo]:=evalf(BesselJZeros(nn,kk)^2);
        #printf("\n*** %.6f",TABZero[foo]);
        TABInd[foo]:=1;
        foo:=foo+1;
    end do;

##STATE
#fidWst:=fopen("ProgState.txt",WRITE);
#fprintf(fidWst,"\nComputation n = %d done",nn);
#fclose(fidWst);

```

```

end do;

# tri sur place
# sort with respect to a categorical value in right column

C:=zip((x,y)->[x,y],TABZero,TABInd);
f:=(x,y)->evalb(x[1]<=y[1]);
E:=sort(C,f);
F:=map(x->x[1],E);
G:=map(x->x[2],E);

#STATE
fidWst:=fopen("ProgState.txt",WRITE);
fprintf(fidWst,"\nSorting done");
fclose(fidWst);

TAB_EV:=Array(1..sizeTAB);

ABC:=1;
for ii from 1 by 1 while ii<=nbEV do
    #if order=0 then multiplicity = 1;
    if (G[ABC]=0) then TAB_EV[ii]:=F[ABC];
    #else order not 0 then multiplicity = 2;
    else TAB_EV[ii]:=F[ABC]; TAB_EV[ii+1]:=F[ABC]; ii:=ii+1;
    end if;
    ABC:=ABC+1;
end do;

#STATE
fidWst:=fopen("ProgState.txt",WRITE);
fprintf(fidWst,"\nList of EVs created");

```

```

fclose(fidWst);

fidW:=fopen("ListEVs.txt",WRITE);
for ii from 1 to nbEV do
    fprintf(fidW,"%d %.6f\n",ii,TAB_EV[ii]);
end do;
fclose(fidW);

#STATE
fidWst:=fopen("ProgState.txt",WRITE);
fprintf(fidWst,"\nCPU time required = %.4f",time()-Time0);
fclose(fidWst);

## for computational checks
#fidW:=fopen("TMP_01.txt",WRITE);
#for ii from 1 to (foo-1) do
#    fprintf(fidW,"%d %.6f\n",G[ii],F[ii]);
#end do;
#fclose(fidW);

quit;

```

A.2. PROGRAMME POUR ÉVALUER LA FONCTION DE COMPTE

```

ppBY:=1;
ppMAX:=10;
aaBY:=4;
aaMAX:=9;
abc:=0;
for pp from 1 by ppBY to ppMAX do

```

```

    for aa from 1 by aaBY to aaMAX do
        abc:=abc+1;

    end do;
end do;
SizeSample:=abc;
SqRLamb:=Array(1..SizeSample);
TimeTab:=Array(1..SizeSample);

Digits:=10;

# Ajuster boucles en fonction nombre de cas voulus
# donc SizeSample...
abc:=0;
for pp from 1 by ppBY to ppMAX do
    for aa from 1 by aaBY to aaMAX do

        abc:=abc+1;
        SqRLamb[abc]:=evalf(sqrt(aa*(10^pp)));
    end do;
end do;

fidOut:=fopen("ResCount.txt",WRITE);
fclose(fidOut);
fidT:=fopen("TimeTrueCount.txt",WRITE);
fclose(fidT);

for aa from 1 to SizeSample do

```



```

tmpT0:=time();

EigMax:=SqRLamb[aa];
# K0 = max(k, zero(ordre 0, index k) <= lambda)
for K0 from 1 to infinity do
tmp:=evalf(BesselJZeros(0,K0));
if (tmp>EigMax) then kk:=K0-1; break; end;
end do;

# N1 = max(n, zero(ordre n, index 1) <= lambda)
for N1 from 0 to infinity do
tmp:=evalf(BesselJZeros(N1,1));
if (tmp>EigMax) then sizetab:=N1; break; end;
end do;

Ord:=Array(1..N1+1);
Ind:=Array(1..N1+1);
Ord[1]:=0;
Ind[1]:=kk;

# on monte au ciel
for nn from 1 to N1 do

tmp:=evalf(BesselJZeros(nn,kk));
# on recule au Moyen-Age
for ll from 1 while tmp>EigMax to infinity do
    kk:=kk-1;
    tmp:=evalf(BesselJZeros(nn,kk));
end;

Ord[nn+1]:=nn;

```

```

Ind[nn+1]:=kk;
if (kk = 0) then break; end;

end do;

# Ind[1], c'est pour l'ordre zéro donc
# multiplicité est 1
Tcount:=Ind[1];
for bb from 2 to (N1+1) do
# multiplicité est 2
Tcount:=Tcount+2*Ind[bb];
end do;

fidOut:=fopen("ResCount.txt",APPEND);
fprintf(fidOut,"% .12E %d\n",round(SqRLamb[aa]^2),Tcount);
fclose(fidOut);
fidT:=fopen("TimeTrueCount.txt",APPEND);
fprintf(fidT,"N(% .12E) = %d *** Temps requis = % .6f
secondes.\n",round(SqRLamb[aa]^2),Tcount,time()-tmpT0);
fclose(fidT);
end do;

quit;

```

A.3. ÉVALUATION DES POINTS STATIONNAIRES DES FONCTIONS APPARAISSANT DANS LE DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'OLVER

Rappelons que

$$\begin{aligned}\zeta(z) &= \left(\frac{3}{2} \int_z^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} dz \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{3}{2} \log \left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} \right) - \frac{3}{2} \sqrt{1-z^2} \right)^{\frac{2}{3}} \quad 0 < z < 1 \\ \zeta(z) &= - \left(\frac{3}{2} \int_1^z \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= - \left(\frac{3}{2} \sqrt{z^2-1} - \frac{3}{2} \arccos \left(\frac{1}{z} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \quad z \geq 1\end{aligned}$$

alors pour la fonction pour la fonction $|\zeta(z)|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta(z))$ où B_0 est donnée par

$$\begin{aligned}B_0(\zeta) &= -\frac{3t-5t^3}{24\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{48\zeta^2} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1 \\ B_0(\zeta) &= \frac{3t_1+5t_1^3}{24\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{48\zeta^2} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1\end{aligned}$$

et où

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

alors voici le code évaluant ses points stationnaires.

```
restart;
Digits:=20;

#I put t below but it IS t1 in the text before!
t:=(z^2 - 1)^(-0.5);

K:=1.5*sqrt(z^2 - 1) - 1.5*arccos(1/z);

b0:=(3*t)/(24*(K^(1/3))) + (5*(t^3))/(24*(K^(1/3))) -
```

$$5/(48*(K^{(4/3)}));$$

```
foo:=diff(((abs(K))^(1/3))*b0,z$1);
```

```
ptstat:=fsolve(foo,z=2.71);
```

```
xipt:=evalf(-(subs(z=ptstat,K))^(2/3));
```

```
totval:=(1/12)+2*evalf(subs(z=ptstat,((abs(K))^(1/3))*b0));
```

```
fidTerm:=fopen(terminal,WRITE);
```

```
fprintf(fidTerm,"\n\n***** Total variation = %.20f \n\n",totval);
```

```
fidFile:=fopen("VarTotResultB0.txt",WRITE);
```

```
fprintf(fidFile,"\n\n***** Variation totale = %.20f\n\n",totval);
```

```
fprintf(fidFile,"\n\n***** Point stationnaire autre que z=1 ;\n\nz = %.20f\n\n",ptstat);
```

```
fprintf(fidFile,"\n\n***** xi(point stationnaire) =\n\n%.20f\n\n",xipt);
```

```
fprintf(fidFile,"\n\n***** sqrt(|xi|)B0(xi) = %.20f\n\n",evalf(subs(z=ptstat,((abs(K))^(1/3))*b0)));
```

```
fclose(fidFile);
```

Pour la fonction $|\zeta(z)|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta(z))$ où B_1 est donnée par

$$\begin{aligned}
 B_1(\zeta) &= \frac{-(30375t^3 - 369603t^5 + 765765t^7 - 425425t^9)}{414720\zeta^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad - \frac{(405t^2 - 2310t^4 + 1925t^6)}{55296\zeta^2} \\
 &\quad - \frac{(1155t - 1925t^3)}{110592\zeta^{\frac{7}{2}}} - \frac{85085}{663552\zeta^5} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1 \\
 B_1(\zeta) &= \frac{(30375t_1^3 + 369603t_1^5 + 765765t_1^7 + 425425t_1^9)}{414720\zeta^{\frac{1}{2}}} \\
 &\quad + \frac{(405t_1^2 + 2310t_1^4 + 1925t_1^6)}{55296\zeta^2} \\
 &\quad + \frac{(1155t_1 + 1925t_1^3)}{110592\zeta^{\frac{7}{2}}} + \frac{85085}{663552\zeta^5} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1
 \end{aligned}$$

et où t et t_1 sont comme précédemment, alors voici le code évaluant ses points stationnaires.

```

restart;
Digits:=20;

# 0<z<1 ou bien xi>0

t:=(1-z^2)^(-0.5);

K:=1.5*log((1+sqrt(1-z^2))/z) - 1.5*sqrt(1-z^2);

b11:=- (30375*t^3 - 369603*t^5 + 765765*t^7 -
        425425*t^9)/(414720*(K^(1/3)));
b12:=- (405*t^2 - 2310*t^4 + 1925*t^6)/(55296*(K^(4/3)));
b13:=- (1155*t-1925*t^3)/(110592*(K^(7/3)));
b14:=-85085/(663552*(K^(10/3)));
b1:=b11+b12+b13+b14;

```

```

foo:=diff(((abs(K))^(1/3))*b1,z$1);

ptstat1:=fsolve(foo,z=0.5);

##xipt:=evalf((subs(z=ptstat1,K))^(2/3));

tmp0:=evalf(limit(((abs(K))^(1/3))*b1,z=0));
tmp1:=evalf(subs(z=ptstat1,((abs(K))^(1/3))*b1));

#####

# z>1 ou bien xi<0

t1:=(z^(2)-1)^(-0.5);

K1:=1.5*sqrt(z^2 - 1) - 1.5*arccos(1/z);

b111:=(30375*t1^3 + 369603*t1^5 + 765765*t1^7 +
        425425*t1^9)/(414720*(-(K1)^(1/3)));
b121:=(405*t1^2 + 2310*t1^4 + 1925*t1^6)/(55296*(K1^(4/3)));
b131:=(1155*t1+1925*t1^3)/(110592*(-(K1)^(7/3)));
b141:=85085/(663552*(K1^(10/3)));
b11:=b111+b121+b131+b141;

foo1:=diff(((abs(K1))^(1/3))*b11,z$1);

ptstat3:=fsolve(foo1,z=1.5);

tmp3:=evalf(subs(z=ptstat3,((abs(K1))^(1/3))*b11));
tmp4:=evalf(limit(((abs(K1))^(1/3))*b11,z=infinity));

```

```

totval:=tmp0+tmp4-2*tmp1-2*tmp3;
fidFile:=fopen("VarTotResultB1.txt",WRITE);
fprintf(fidFile,"\n\n***** Variation totale = %.20f
                                     \n\n",totval);
fprintf(fidFile,"\n\n***** Point stationnaire no. 1
                autre que z=1 ; z1 = %.20f\n\n",ptstat1);
fprintf(fidFile,"\n\n***** Point stationnaire no. 2
                autre que z=1 ; z2 = %.20f\n\n",ptstat3);
fprintf(fidFile,"\n\n***** sqrt(|xi|)B1(xi) pour
                xi(z1) = %.20f\n\n",tmp1);
fprintf(fidFile,"\n\n***** sqrt(|xi|)B1(xi) pour
                xi(z2) = %.20f\n\n",tmp3);
fprintf(fidFile,"\n\n***** limit(|xi|)B1(xi)
                (vers xi(0) = infty) = %.20f\n\n",tmp0);
fprintf(fidFile,"\n\n***** limit(|xi|)B1(xi)
                (vers xi(infty) = -infty) = %.20f\n\n",tmp4);
fclose(fidFile);

```

A.4. PROGRAMME EN MATLAB POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DE VALEURS PROPRES ET VISUALISER LES ENSEMBLES NO- DAUX DES FONCTIONS PROPRES

Pour de l'information sur ces programmes, vous pouvez taper par exemple

```
>>help SpDisque
```

dans Matlab dans le répertoire où vous enregistrez les fichiers pour savoir quoi faire.

```

function [] = SpDisque(NbEV,NbCourbesNiveau);
% NbEV : nombre de valeurs propres désirées
% NbCourbesNiveau : quantité des courbes à nouveau pour les figures

```

```

%
% Conditions de Dirichlet aux frontières sont appliquées.
%
% DÉPENDANCE : DisqueGeo.m
%
% Exemple : SpSecteur(50,[0.25*pi 2*exp(1)],1000);

% Conditions aux frontières
BdyCond = [1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0'; %1 Dir
           1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0'; %2 Dir
           1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0'; %3 Dir
           1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0']; %4 Dir

% Constantes pour la description de l'équation
c = 1; a = 0; d = 1;

% Efface fichiers information sur mesh et état du programme
fidIG = fopen('SpDisqueMeshQual.txt','wt');
fclose(fidIG);
fidEt = fopen('SpDisqueEtat.txt','wt');
fclose(fidEt);
fidEr = fopen('SpDisqueErreurs.txt','wt');
fclose(fidEr);

try

    % Mesh ici
    [p,e,t]=initmesh('DisqueGeo','Hmax',2e6,'Init','off','Box','off'
        , 'Hgrad',1.05,'Jiggle','minimum','JiggleIter',120);
    [p,e,t]=initmesh('DisqueGeo'); %%% for testing
    [p,e,t]=refinemesh('DisqueGeo',p,e,t);

```



```

[p,e,t]=refinemesh('DisqueGeo',p,e,t);
[p,e,t]=refinemesh('DisqueGeo',p,e,t);
%[p,e,t]=refinemesh('SecteurGeo',p,e,t);

% stat sur qualité du mesh
Mesh_Quality = pdetriq(p,t);
fidIG = fopen('SpDisqueMeshQual.txt','at');
fprintf(fidIG,'\nQualité moyenne des triangles = %.6f',
    mean(Mesh_Quality));
fprintf(fidIG,'\nÉcart-type sur les triangles = %.6f',
    std(Mesh_Quality));
fprintf(fidIG,'\nMinimum de qualité atteint = %.6f',
    min(Mesh_Quality));
fprintf(fidIG,'\nMaximum de qualité atteint = %.6f\n',
    max(Mesh_Quality));
fclose(fidIG);

% résoudre ici
MaxEig=1.0;
while(1)

    fidEt = fopen('SpDisqueEtat.txt','wt');
    fprintf(fidEt,'\nAppel à pdeeig avec MaxEig = %.6f\n\n',
        MaxEig);
    fclose(fidEt);

    [EF_tab,EV_tab]=pdeeig(BdyCond,p,e,t,c,a,d,[0 MaxEig]);

    if length(EV_tab) >= NbEV
        break;

```

```

else
    MaxEig = 2.00*MaxEig;
end;
end;

% fait des beaux dessins ici :-) Sans-Dessin ha ha

for jj = 1:1:NbEV
    fnamestr = char(strcat({'Disque'},{'EF'},{num2str(jj)}));
    titlestr = char(strcat({'Disque '},{'\lambda_{'},
        {num2str(jj)},'}=',{num2str(EV_tab(jj))}));
    pdeplot(p,[],t,'xydata',EF_tab(:,jj),'xystyle','flat',
        'colormap','Jet','colorbar','off');
    title(titlestr);
    %print('-depsc2','-r0',fnamestr);
    print('-djpeg','-r0',fnamestr);

end;

catch

    v = lasterror;
    fidEr = fopen('SpDisqueErreurs.txt','at');
    fprintf(fidEr,'\n%s\n',v.message);
    fclose(fidEr);

end;



---


function [] = SpSecteur(NbEV,angles,NbCourbesNiveau);

```

```

% NbEV : nombre de valeurs propres désirées
% angles : vecteur des angles de chaque secteur
% NbCourbesNiveau : quantité des courbes à nouveau pour les figures
%
% Conditions de Dirichlet aux frontières sont appliquées.
%
% DÉPENDANCE : SecteurGeo.m
%
% Exemple : SpSecteur(3,[1.0 1.11 1.112 1.1125 1.11253 1.112531
    1.1125316 1.112531602 1.1125316027 1.11253160273 1.112531602739
    1.112531602739001 1.2],1000);

% Conditions aux frontières
BdyCond = [1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0'; %1 Dir
           1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0'; %2 Dir
           1 1 1 1 1 1 '0' '0' '1' '0']; %3 Dir

% Constantes pour la description de l'équation
c = 1; a = 0; d = 1;

% Efface fichiers information sur mesh et état du programme
fidIG = fopen('SpSecteurMeshQual.txt','wt');
fclose(fidIG);
fidEt = fopen('SpSecteurEtat.txt','wt');
fclose(fidEt);
fidEr = fopen('SpSecteurErreurs.txt','wt');
fclose(fidEr);

try
    % Itération sur les cas différents i.e. les angles

```

```

for ii = 1:1:length(angles)

    fid = fopen('AngleGeoSecteur.txt','wt');
    fprintf(fid, '%.16f\n',angles(ii));
    fclose(fid);

    % Mesh ici
    [p,e,t]=initmesh('SecteurGeo','Hmax',2e6,'Init','off','Box',
        'off','Hgrad',1.05,'Jiggle','minimum','JiggleIter',120);
    [p,e,t]=initmesh('SecteurGeo'); %%% for testing
    [p,e,t]=refinemesh('SecteurGeo',p,e,t);
    [p,e,t]=refinemesh('SecteurGeo',p,e,t);
    [p,e,t]=refinemesh('SecteurGeo',p,e,t);
    [p,e,t]=refinemesh('SecteurGeo',p,e,t);

    % stat sur qualité du mesh
    Mesh_Quality = pdettriq(p,t);
    fidIG = fopen('SpSecteurMeshQual.txt','at');
    fprintf(fidIG, '\nSecteur d''angle %.16f',angles(ii));
    fprintf(fidIG, '\nQualité moyenne des triangles = %.6f',
        mean(Mesh_Quality));
    fprintf(fidIG, '\nÉcart-type sur les triangles = %.6f',
        std(Mesh_Quality));
    fprintf(fidIG, '\nMinimum de qualité atteint = %.6f',
        min(Mesh_Quality));
    fprintf(fidIG, '\nMaximum de qualité atteint = %.6f\n',
        max(Mesh_Quality));
    fclose(fidIG);

    % résoudre ici

```

```

MaxEig=1.0;
while(1)

    fidEt = fopen('SpSecteurEtat.txt','wt');
    fprintf(fidEt,'\nAppel à pdeeig avec MaxEig = %.6f\n\n',
        ,MaxEig);
    fclose(fidEt);

    [EF_tab,EV_tab]=pdeeig(BdyCond,p,e,t,c,a,d,[0 MaxEig]);

    if length(EV_tab) >= NbEV
        break;
    else
        MaxEig = 2.00*MaxEig;
    end;
end;

% fait des beaux dessins ici :-) Sans-Dessin ha ha
for jj = 1:1:NbEV
    fnamestr = char(strcat({'Sect'},{num2str(ii)},{ 'EF'},
        {num2str(jj)}));
    titlestr = char(strcat({'Secteur d''angle '},
        {num2str(angles(ii),16)},{ ' \lambda_{'},{num2str(jj)},{ '}= ',
        {num2str(EV_tab(jj))}));

    pdeplot(p,[],t,'xydata',EF_tab(:,jj),'xystyle','flat',
        'colormap','Jet','colorbar','off');
    title(titlestr);
    %print('-depsc2','-r0',fnamestr);
    print('-djpeg','-r0',fnamestr);
end;

```

```

end;

catch
    v = lasterror;
    fidEr = fopen('SpSecteurErreurs.txt','at');
    fprintf(fidEr,'\n%s\n',v.message);
    fclose(fidEr);
end;

%exit;



---


function [x,y]=DisqueGeo(bs,s)
%   Géométrie du disque de rayon 1 pour résolution PDE
nbs=4;

if nargin==0,
    x=nbs; % number of boundary segments
    return
end;

d=[ 0.0  0.5*pi  1  0;   %1
    0.5*pi pi    1  0;   %2
    pi 1.5*pi    1  0;   %3
    1.5*pi 2*pi  1  0]'; %4

bs1=bs(:)';

if find(bs1<1 | bs1>nbs),
    error('Invalid boundary segment.',
        'Non existent boundary segment number.')

```

```

end

if nargin==1,
    x=d(:,bs1);
    return
end

x=zeros(size(s));
y=zeros(size(s));
[m,n]=size(bs);
if m==1 && n==1,
    bs=bs*ones(size(s)); % expand bs
elseif m~=size(s,1) || n~=size(s,2),
    error('PDE:Sector Geometry : SizeBs',
        'bs must be scalar or of same size as s.');
```

end

```

if ~isempty(s),

% boundary segment 1
ii=find(bs==1);
x(ii)=cos(s(ii));
y(ii)=sin(s(ii));

% boundary segment 2
ii=find(bs==2);
x(ii)=cos(s(ii));
y(ii)=sin(s(ii));

% boundary segment 3
ii=find(bs==3);
```

```

x(ii)=cos(s(ii));
y(ii)=sin(s(ii));

% boundary segment 4
ii=find(bs==4);
x(ii)=cos(s(ii));
y(ii)=sin(s(ii));

end



---


function [x,y]=SecteurGeo(bs,s)
%   Géométrie du secteur de rayon 1 pour PDE solving
nbs=3;

if nargin==0,
    x=nbs; % number of boundary segments
    return
end;

[alpha] = textread('AngleGeoSecteur.txt');

if (alpha>=2*pi)
    error('BadParam:GeoFile:DesignerCheck',
        'L''angle pour un secteur < 2*pi');
end;

d=[ 0.0  1.0    1  0;   %1
    0.0  alpha  1  0;   %2
    1.0  0.0    1  0]'; %3

```



```

bs1=bs(:)';

if find(bs1<1 | bs1>nbs),
    error('Invalid boundary segment.',
        'Non existent boundary segment number.')
end

if nargin==1,
    x=d(:,bs1);
    return
end

x=zeros(size(s));
y=zeros(size(s));
[m,n]=size(bs);
if m==1 && n==1,
    bs=bs*ones(size(s)); % expand bs
elseif m~=size(s,1) || n~=size(s,2),
    error('PDE:Sector Geometry : SizeBs',
        'bs must be scalar or of same size as s.');
```

end

```

if ~isempty(s),

% boundary segment 1
ii=find(bs==1);
x(ii)=s(ii);
y(ii)=0.0;

% boundary segment 2
ii=find(bs==2);
```

```

x(ii)=cos(s(ii));
y(ii)=sin(s(ii));

% boundary segment 3
ii=find(bs==3);
x(ii)=s(ii)*cos(alpha);
y(ii)=s(ii)*sin(alpha);

end

```

A.5. PRÉCISION DES CALCULS

Remarque A.5.1 (Calcul des zéros et précision). *Par (1.3.1), la longueur décimale de $j_\nu(k)$ n'excède pas la longueur décimale de ν . Par conséquent pour calculer la partie entière des zéros $j_k(\nu)$ sans perte de précision, il ne faut que $\lceil \log_{10}(\nu) \rceil$ décimales. Pour être prudent, nous pouvons exiger $\lceil \log_{10}(\nu) \rceil + 1$ décimales de précision. Si nous voulons évaluer les zéros à une précision absolue de 10^{-p} , alors il faut que les calculs se fassent avec $\lceil \log_{10}(\nu) \rceil + 1 + p$ de décimales.*

La remarque précédente explique pourquoi la ligne de code

```
Digits:=ceil(log(nbEV)/log(10))+1+6;
```

apparaît dans le programme de la section 2.2. **En effet**, le plus petit ordre entier non nul n des fonctions de Bessel impliquées dans l'obtention de la suite spectrale $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ est 1. Si, encore, nous dénotons par k le rang d'un zéro, alors, par le théorème de Courant, $2nk \leq m$ comme il a été expliqué au chapitre 1 en tenant compte de la multiplicité puisque ce sont des valeurs propres de multiplicité 2. Si l'ordre est nul, alors $k \leq m$ et c'est une valeur propre de multiplicité 1 comme il a été expliqué au chapitre 1. Dans le cas d'un secteur, $nk \leq m$. Dans les deux cas (le disque ou le secteur), nous avons que l'ordre maximal impliqué est inférieur à m . Puisque m est le nombre de valeurs propres désirées c'est-à-dire $m := nbEV$ dans le programme, alors nous voyons d'où sort la formule. Le choix d'imposer une précision de 10^{-6} s'explique par le fait que nous voulons éviter de trouver

des zéros ayant la même représentation jusqu'à 10^{-3} comme il est possible d'en trouver dans la liste de 30 MB des valeurs propres λ_j pour $j = 1, \dots, 10^6$.

Dans le cas du programme de la section 3.3, il faut évaluer tous les zéros $j_k(n) \leq \sqrt{\lambda}$. Puisque la valeur maximale de λ pour laquelle nous voulons évaluer $N(\lambda)$ est $9.00 \cdot 10^8$, alors le nombre de décimales requises $\lceil \log_{10}(9.00 \cdot 10^8) \rceil + 1 + 0 = 10$ d'où la ligne de code

```
Digits:=10;
```

dans le programme de la section 3.3 évaluant $N(\lambda)$.

A.6. MÉTHODES UTILISÉES PAR LE LOGICIEL MAPLE POUR ÉVALUER LES ZÉROS

Ci-dessous, nous trouvons une bonne partie de l'information nécessaire pour savoir comment Maple évalue les zéros des fonctions de Bessel. C'est un courriel qui m'a été envoyé par l'équipe technique de Maplesoft.

Comments extracted from the source file:

Rayleigh's formula for the first zero of BesselJ function can be obtained in reference:

G.N. Watson - A Treatise on the Theory of Bessel Functions,
2nd ed., CUP, 1966, page 502,

Olver's asymptotic expansion for large order can be obtained in references:

M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions,
Dover, NY (1972)

Royal Society Mathematical Tables, vol. 7, part III. Ed. F.W.J.
Olver, CUP, 1960

Olver, F.W.J., Philosophical Transactions of the Royal Society, A,
vol 247, pag. 307-368 (1954)

McMahon's asymptotic expansion for large n can be obtained in
references:

M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions,
Dover, NY (1972)

G.N. Watson - A Treatise on the Theory of Bessel Functions,
2nd ed., CUP, 1966

To find the N_{th} ZERO OF BESSEL FUNCTION of order m ,
the procedure uses the following results proved by
Schafheitlin see

G.N. Watson - A Treatise on the Theory of Bessel Functions,
2nd ed., CUP, 1966:

For $m \leq 1/2$ the n_{th} zero of $BesselJ[m](x)$ is in the interval:
 $[(n+m/2-1/4)*\pi \dots (n+m/4-1/8)*\pi]$

For $1/2 < m < 5/2$ the n_{th} zero of $BesselJ[m](x)$ is in the interval:
 $[(n+m/4-1/8)*\pi \dots (n+m/2-1/4)*\pi]$

For $m > 1/2$, the zeros of $BesselJ[m](x)$ which exceed
 $(2*m+1)*(2*m+3)/\pi$ are in the intervals: $[(p+m/2+1/2)*\pi \dots$
 $(p+m/2+3/4)*\pi]$ where p are consecutive positive integers. The
relation of p with n has been taken as $p=n-1$.

The zeros less than $(2*m+1)*(2*m+3)/\pi$ will be found by a recursive algorithm.

We use the following asymptotic approximations for the first and second zeros[see Watson]:

first zero: $m + 1.85*m^{(1/3)} + O(m^{(-1/3)})$

second zero: $m + 3.24*m^{(1/3)} + O(m^{(-1/3)})$

To find the n-th zero $j(m,n)$ we use the interval

$[j(m,n-1) \dots j(m,n-1) + \text{incr}]$

where the increment is

$\text{incr} = j(m,n-1) - j(m,n-2)$

The other part of the solution can be found by setting a Maple Interface variable to display the initial routine that is used.

`interface(verboseproc=3); eval(BesselJZeros);`

I hope this helps answer your questions.

Cheers,

Ian Maplesoft Technical Support www.maplesoft.com/support/

-----Original Message-----

From: Maplesoft Customer Service Sent: Monday, November 05, 2007 4:15 PM To: Claude Gravel; Maplesoft Technical Support Subject: RE: Customer Service Request: (Web) Other

Comme nous pouvons le constater, Maple utilise les développements asymptotiques d'Olver pour représenter les fonctions de Bessel pour des ordres grands. Les développements asymptotiques d'Olver des zéros pour des ordres grands sont également utilisés pour évaluer les zéros.